

# Streuexperimente

Skriptum zum Vorlesungsteil über Teilchenphysik I  
U. Straumann, Universität Zürich, 15. bis 22. November 2007.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Wirkungsquerschnitt</b>	<b>1</b>
1.1	Relativistische Kinematik . . . . .	3
1.2	Diracgleichung . . . . .	6
1.3	Streumatrix und Feynmanregeln . . . . .	8
1.4	Vom Matricelement zum Wirkungsquerschnitt . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Streuexperimente und Resonanzproduktion</b>	<b>13</b>
2.1	Streuung im s-Kanal . . . . .	13
2.2	Streuung im t-Kanal . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Tiefunelastische Streuung</b>	<b>16</b>
3.1	Beispiel eines Ereignisses der tiefunelastischen Streuung . . . . .	16
3.2	Unelastische Streuung . . . . .	17
3.2.1	Beispiel für $x$ als Impulsanteil des Streuobjekts . . . . .	19
3.3	Partonmodell und Strukturfunktionen . . . . .	20
3.4	Skalenverletzung . . . . .	21

## 1 Der Wirkungsquerschnitt

Der *Wirkungsquerschnitt*  $\sigma$  beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Teilchen a und b miteinander wechselwirken

$$a + b \rightarrow X \tag{1}$$

wobei X der Endzustand aus mehr oder weniger vielen Teilchen bestehen kann. Man unterscheidet *fixed target* Experimente, wo Teilchen aus einem Beschleuniger auf eine ruhende Probe geschossen werden, und *collider* Experimente, wo zwei Teilchenstrahlen zur Kollision gebracht werden

Man nimmt an, dass

- die Teilchendichte in Strahl und Target so klein ist, dass es keine Interferenzeffekte durch Streuung an mehreren Targetteilchen gibt.
- die Reaktionsprodukte X die Reaktionszone ungestört verlassen können.
- die Strahlteilchendichten so klein sind, dass es keine Wechselwirkung zwischen ihnen gibt.

Der Fluss  $\phi = vn_a$  der einfallenden Teilchen pro Zeiteinheit und Fläche ist proportional zu deren Geschwindigkeit  $v$  und der Teilchen-Strahldichte  $n_a$  (Teilchen pro Volumen). Die *Reaktionsrate*  $W$  für fixed target Experimente, also die Zahl der beobachtbaren Reaktionen pro Zeiteinheit, wird ausserdem proportional zu der Zahl der Teilchen  $N$  im Target, die vom Strahl beleuchtet werden und der *Effektivität*  $\eta$  der Detektorapparatur, diese Reaktion zu messen:

$$W = \phi \cdot N \cdot \eta \cdot \sigma \quad (2)$$

Manchmal verwendet man  $\phi$  auch als Teilchenrate (Teilchen pro Zeiteinheit), und dafür für  $N$  Target-Flächendichte, also die Zahl der Targetteilchen pro  $\text{cm}^2$ . In beiden Fällen muss man darauf achten, wie sich der Strahlquerschnitt und die Targetfläche überschneiden.

Für collider Experimente wird

$$W = \frac{f_0 n_1 n_2}{A} \cdot \eta \cdot \sigma =: L \cdot \eta \cdot \sigma \quad (3)$$

Hier sind nun  $n_1$  und  $n_2$  die Zahl der Teilchen pro Paket im Beschleuniger, die sich mit der Frequenz  $f_0$  im Zentrum der Detektoren kreuzen und  $A$  die Querschnittsfläche mit der sich die beiden Strahlen überschneiden. Die Grösse  $L = f_0 \cdot n_1 \cdot n_2 / A$  wird als *Luminosität* bezeichnet.

$\sigma$  hat also die Dimension einer Fläche und wird oft in *barn* angegeben:

$$1\text{barn} = 1\text{b} = 10^{-28}\text{m}^2 \quad 1\text{mb} = 0.1\text{fm}^2 = 2.5\text{GeV}^{-2} \quad (4)$$

Gleichung 3 faktorisiert also die gezählten Ereignisraten in drei Teile: Die Luminosität hat die Einheit  $\text{Fläche}^{-1}\text{sec}^{-1}$  und wird nur durch den experimentellen Aufbau des Beschleunigers bestimmt.  $\eta$  beschreibt den Detektor, wobei man meist unterscheidet zwischen der geometrischen Akzeptanz und der Ansprechwahrscheinlichkeit (Efficiency) der Detektoren. Dann ist  $\eta$  das Produkt dieser zwei Grössen.  $\sigma$  beschreibt die physikalischen Vorgänge der eigentlichen Wechselwirkung.

Man beachte, dass  $\sigma$  lorentzinvariant gegenüber Transformationen in der Strahlrichtung ist! Man kann sich  $\sigma$  anschaulich als die Fläche vorstellen, innerhalb der ein Teilchen in der Lage ist, zu wechselwirken.

$\eta$  enthält sowohl geometrische Faktoren - der Bruchteil der Raumrichtungen in den Teilchen detektiert werden können (Raumwinkel), als auch Ansprechwahrscheinlichkeiten der Detektoren.

Man unterscheidet

- totaler WQ:  $a + b \rightarrow \text{anything}$
- differentieller WQ: Abhängigkeit von diversen Parametern, z.B.  $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}$ ,  $\frac{\partial\sigma}{\partial E}$ , usw.
- inklusiver WQ:  $a + b \rightarrow c + X$ , wobei X beliebig (und meist  $c = a$ )
- exklusiv: ein bestimmter Ausgangskanal zum Beispiel  $a + b \rightarrow c + d$ ,
- elastisch:  $a + b \rightarrow a + b$

- inelastisch: alles ausser elastisch.

Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  als Funktion der verschiedenen kinematischen und anderen Parametern ist die Messgrösse des Experimentators.  $\sigma$  kann andererseits theoretisch berechnet werden. Bei elektromagnetischer Wechselwirkung zum Beispiel aus der räumlichen elektrischen Ladungsverteilung des Targetteilchens, wie im Beispiel der Rutherfordstreuung.

Der Wirkungsquerschnitt ist gewissermassen das Interface zwischen Experimentalphysiker und Theoretiker.

Als Beispiel diskutieren wir hier die hadronischen Wirkungsquerschnitte der Streureaktionen  $pp$  und  $\bar{p}p$  (siehe Abbildung 1):

Zuerst stellen wir fest, dass bei sehr kleinen Schwerpunktsenergien der Wirkungsquerschnitt für  $pp$  rein elastisch ist, und stark mit der Energie abfällt, wie wir das für punktförmige Teilchen erwarten. Die dominierende WW ist zuerst elektromagnetisch, es wird ein Photon ausgetauscht. Der WQ geht propotional zu  $1/s$  (siehe 2.1.3). Bei grösseren Energien kommt die starke WW ins Spiel, vorerst durch Austausch eines virtuellen Pions, dessen Propagator durch die endliche Ruhemasse des Pions kleiner ist.

Bei einer Schwerpunktsenergie grösser als  $2m_p + m_\pi \approx 2.1\text{GeV}$  kann ein reelles Pion produziert werden, von jetzt an dominiert der inelastische WQ über den elastischen. Der totale WQ ist jetzt über mehrere Grössenordnungen der Energie fast konstant.

Ein solches konstantes Verhalten eines WQ erhält man unter der Annahme, dass die Teilchen sich wie Scheiben mit festem Radius  $R$  verhalten, es wird rein geometrisch  $\sigma = 4\pi R^2$ . Aus dem gemessenen  $\sigma_{\text{tot}}$  von etwa 40 mb erhält man  $R \approx 0.5$  fm, was etwa dem Radius des Protons entspricht. Eine solche Annahme führt auch zu Beugungsmustern (Diffraktion), an einem kreisförmigen Gegenstand. In der Tat beobachtet man Diffraktion bei der Messung vom differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$  von hadronischen Streuprozessen, siehe zum Beispiel [Povh95], Seite 64.

In diesem Bereich ist der  $\bar{p}p$  etwa gleich gross, wie der  $pp$ , da die Gluon-Gluon Wechselwirkung dominiert, wohingegen die Quark-Antiquark Annihilationen bei kleinen Energien dominieren. Bei sehr grossen Energien nimmt der WQ langsam wieder zu.

## 1.1 Relativistische Kinematik

Hier wollen wir die zum Teil bereits verwendeten Zusammenhänge der speziellen Relativitätstheorie, die für die Teilchenphysik relevant sind, zusammenstellen. Wir stellen die 4-dim *Raumzeitkoordinate* als  $x^\mu = (t, \vec{x})$  dar, also zum Beispiel auch  $p^\mu = (E, \vec{p})$ . Das Skalarprodukt der Metrik

$$m^2 = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = p_\mu p^\mu \quad g^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(wobei über gleiche Indizes zu summieren ist) ist lorentzinvariant. Offensichtlich ist  $m$  gerade die Ruhemasse eines Teilchens.  $g_{\mu\nu}$  heisst der *metrische Tensor*, die angegebene Definition gilt für die flache Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie.

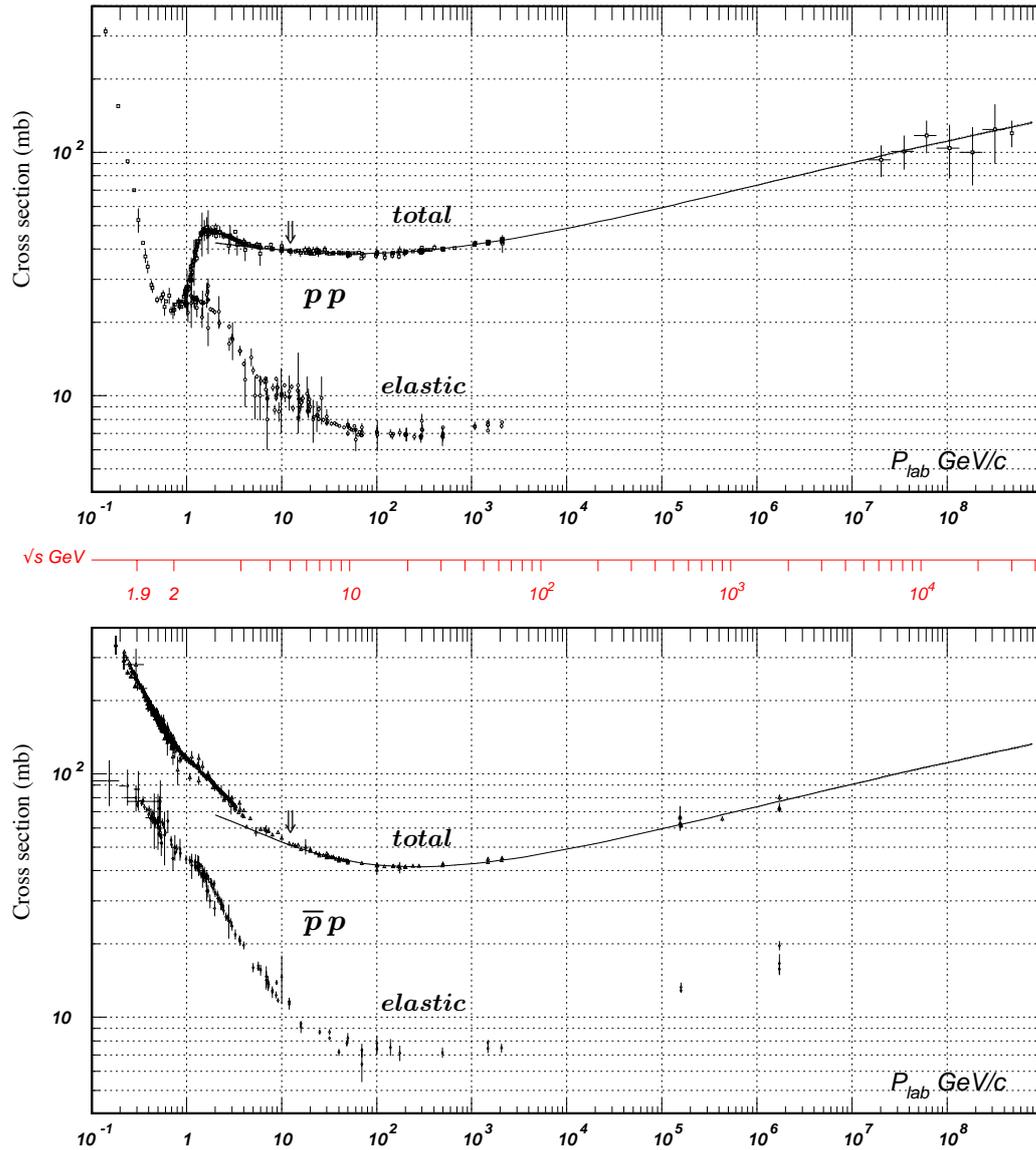


Figure 40.11: Total and elastic cross sections for  $pp$  and  $\bar{p}p$  collisions as a function of laboratory beam momentum and total center-of-mass energy. Corresponding computer-readable data files may be found at <http://pdg.lbl.gov/xsect/contents.html>. (Courtesy of the COMPAS group, IHEP, Protvino, August 2005.)

Abbildung 1: Totaler und elastischer Wirkungsquerschnitt der Proton-Proton (oben) und Proton-Antiproton Streuung (unten) als Funktion der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  [PDG06].

Die *Lorenztransformationen* zwischen zwei sich mit Geschwindigkeit  $\beta$  gegeneinander bewegend Systemen kann man sich am besten in Matrixschreibweise merken:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (6)$$

$p_{\perp}$  bleibt unverändert. Insbesondere gelten für ein einzelnes Teilchen mit Ruhemasse  $M$ , die folgenden Zusammenhänge

$$E = \gamma M \quad |p| = \beta\gamma M = \beta E \quad (7)$$

Schiessen wir nun ein Strahl von Teilchen  $m_b$  mit Energie  $E_b$  im Laborsystem auf ein ruhendes Target mit Masse  $m_t$ . Die gesamte Energie im Laborsystem wird dann  $E_L = \sqrt{m_b^2 + p_{bL}^2} + m_t$ . Die Energie  $E_{CM}$  im Schwerpunktsystem (das System, indem  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ ) berechnet man am einfachsten über die invariante Masse des Gesamtsystems, das ja eine lorentzinvariante sein muss. Man drückt einfach  $M$  einmal in den Grössen des Laborsystems und einmal in den Grössen des c.o.m. aus:

$$\text{im Labor: } M^2 = E_L^2 - p_L^2 = m_b^2 + m_t^2 + 2m_t E_b, \quad (8)$$

$$\text{im c.o.m.: } M^2 = (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 = E_{CM}^2 \quad (9)$$

Die relative Geschwindigkeit der beiden Bezugssysteme gegeneinander erhält man leicht aus

$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{p_{bL}}{E_b + m_t} \quad (10)$$

Oft ist  $E_b$  gross gegen alle vorkommenden Massen, dann wird  $E_{CM} \approx \sqrt{2m_t E_b}$ .

Für colliding beam Experimente mit zwei Strahlen der Energie  $E_1$  und  $E_2$  wird  $E_{CM}^2 = M^2 = (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 \approx 4E_1 E_2$ , bei einem symmetrischen Beschleuniger also insbesondere gerade das Doppelte der Beamenergien. Hier geht  $E_{CM}$  also linear mit der mittleren Beschleunigerenergie, während bei einem fixed target Experiment sie nur mit der Wurzel der Beamenergie geht.

Beispiele für Collider:

- LEP, Large Elektron Positron Collider, am CERN in Betrieb bis zum Jahr 2000. Maximale Strahlenergie  $E_{e-} = E_{e+} = 105\text{GeV}$ .  $E_{c.o.m.} = 210\text{ GeV}$ .
- HERA, Hochenergieeringanalage am DESY in Betrieb von 1992 bis 2007.  $e \times p = 27.5 \times 920\text{GeV}^2$ , also  $E_{CM} = 318\text{GeV}$ .
- Tevatron am FERMILAB in Chicago, Protonen kollidieren mit Antiprotonen  $E_{\bar{p}} = E_p = 900\text{GeV}$ .  $E_{c.o.m.} = 1.8\text{ TeV}$ ,
- LHC, Large Hadron Collider am CERN, Betrieb ab 2008, Symmetrische Protonstrahlen mit  $E_p = 7'000\text{GeV}$ .  $E_{c.o.m.} = 14\text{ TeV}$ ,

In einem Prozess mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen

$$A + B \rightarrow C + D \quad (11)$$

gibt es ausser den Massen nur zwei unabhängige Variablen, zum Beispiel die Energie der einlaufenden Teilchen und der Streuwinkel  $\theta$ . Deren Werte hängen allerdings vom Bezugssystem ab. Es werden die Mandelstamvariablen als Funktion der 4er-Impulsvektoren definiert:

$$s = (p_A + p_B)^2 \quad \text{Schwerpunktsenergie}^2 \quad (12)$$

$$t = (p_A - p_C)^2 \quad \text{Impulsübertrag}^2 \quad (13)$$

$$u = (p_A - p_D)^2 \quad \text{gekreuzter Imp.-übertrag}^2 \quad (14)$$

Statt  $t$  schreibt man oft  $q^2$ . Man zeigt leicht, dass

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 \quad (15)$$

Die Mandelstam Variablen sind lorentzinvariant, sie eignen sich deshalb besser als Variablen, um den Streuprozess und die Übergangsmatrix  $\mathcal{M}$  anzugeben.

## 1.2 Diracgleichung

([Mart92], page 3-9, [Frau99] S. 202-207)

Teilchenzustände in der mikroskopischen Welt werden in einer nicht relativistischen Weise von der Schrödingergleichung (1926, Universität Zürich) beschrieben. Dirac versuchte 1928 eine mit der speziellen Relativitätstheorie verträgliche Gleichung zu finden.

Die Einführung der Massen- Energieäquivalenz nach Einstein

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} \quad \Rightarrow |E| \geq m^2 \quad (16)$$

hat den vorerst unschön erscheinenden Nachteil, dass es sowohl positive als auch negative Energielösungen gibt, deren Betrag stets grösser als die Ruhemasse  $m$  ist. Das führt vorerst zu einer Katastrophe, indem alle positiven Zustände unter Abstrahlung von Energie in immer tiefere negative Zustände übergehen würden.

Die *Diracgleichung* ist die minimale Erweiterung der Schrödingergleichung, die den Anforderungen der Lorentzinvarianz genügt ([Mart92], page 4,5). Dafür muss sie insbesondere im Hamiltonoperator sowohl die Masse als auch den Impulsoperator enthalten, und zwar in 1. Ordnung, da die Zeitabhängigkeit der Schrödingergleichung auch 1. Ordnung ist, sonst wie die Lorentzinvarianz nicht zu erfüllen. Aus diesem Plausibilitätsargument erhielt Dirac folgender Ansatz:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta m \psi - i \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (17)$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  vorerst beliebige Koeffizienten sind.

Ausserdem muss das Äquivalenzprinzip erfüllt sein: Setzt man zum Beispiel eine ebene Welle  $\psi(x, t) = N e^{i(px - Et)}$  und differenziert sie zweimal nach der Zeit, verwendet  $E^2 = p^2 + m^2$  und

ersetzt  $p$  durch den entsprechenden Operator der Quantenmechanik  $-i\frac{\partial}{\partial x_i}$  erhält man diese Bedingung in der Form der Klein-Gordon Gleichung:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + m^2 \psi \quad \text{oder} \quad (\square + m^2)\psi = 0 \quad (18)$$

Diese Bedingung müssen also Lösungen der Diracgleichung ausserdem erfüllen. Durch Einsetzen der Schrödingergleichung in diese Bedingung erhält man die folgende Bedingungen an die Koeffizienten in der Diracgleichung:

$$\alpha_i^2 = 1 \quad \beta^2 = 1 \quad \beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0 \quad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 (j \neq i) \quad (19)$$

Diese Bedingungen können mit gewöhnlichen Zahlen offensichtlich nicht erfüllt werden, Man braucht mindestens um 4 dimensionale Matrizen. Die Diracgleichung ist also eine 4 dimensionale Matrixgleichung für die Vektoren  $\psi(x, t) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ . Diese werden *Spinoren* genannt. Der Ansatz

$$\psi(x, t) = u(p)e^{i(px - Et)} \quad (20)$$

führt zur Eigenwertgleichung für den 4 komponentigen zeitunabhängigen Spinor  $u(p)$ :

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)u(p) = E \cdot u(p) \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (21)$$

Die  $\alpha_k$  sind 4er Matrizen, die aus je zwei Paulimatrizen  $\sigma_k$  in der Nebendiagonale bestehen, und  $\beta$  eine erweiterte Einsmatrix ist:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

mit den Paulimatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Etwas moderner und viel bequemer schreibt man die ganze Sache als 4er Vektoren und definiert:

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \quad i\partial^\mu = (i\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}) \quad \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \quad (24)$$

Damit wird die Diracgleichung und die an die  $\alpha_k$  und  $\beta$  gestellten Bedingungen:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (25)$$

Sie beschreibt also die Bewegung eines freien Teilchens im Raum. Sie hat **vier unabhängige Lösungen**. Sie entsprechen den Basisvektoren der Spinoren. Und zwar gibt es eine Spin up und eine Spin down Lösung mit je positiver und gleicher aber negativer Energie. Es handelt sich also um die Beschreibung eines Spin 1/2 Teilchens. Die positive Energielösung beschreibt ein Elektron korrekt, wobei insbesondere auch das magnetische Moment  $\mu = e/m \cdot S$  korrekt herauskommt.

Die **negativen Energielösungen** wurde von Dirac ursprünglich mit Löcher in einem See von negativen Energiezuständen identifiziert. Im Vakuumgrundzustand, sind alle negativen Energiezustände voll (wegen dem Pauliprinzip sitzen zwei Elektronen auf einem Zustand). Eine Paarerzeugung  $\gamma \rightarrow e^+e^-$  besteht in diesem Bild daraus, dass ein Elektron aus dem See

in einen positiven Zustand gehoben wird, und das zurückbleibende Loch stellt das Antiteilchen, das Positron dar.

Im modernen Sinne definiert man die Operation der *Ladungskonjugation*:

$$C : \text{Teilchen} \rightarrow \text{Antiteilchen} \quad (26)$$

und umgekehrt. Die *Antiteilchen* entsprechen den negativen Energielösungen. Im Beispiel einer ebenen Welle

$$\psi \propto e^{i(px-Et)} \quad (27)$$

sieht man sofort, dass das äquivalent zu einem Teilchen ist, dass **in der Zeit rückwärts läuft**.

Generell hat ein Antiteilchen umgekehrtes Ladungsvorzeichen und somit umgekehrtes magnetisches Moment, alle anderen Eigenschaften bleiben gleich, insbesondere die Masse. Bsp:  $e^+ \rightarrow e^-$ ,  $u \rightarrow \bar{u}$ ,  $\pi^+ \rightarrow \pi^-$ .

Erzeugt werden Antiteilchen z.B. in der Paarproduktion aus einem Photon. Es können Elektronen oder Quarks sein. Antiquarks können natürlich auch durch Paarerzeugung aus einem Gluon entstehen.

4 Jahre nach der Publikation der Diracgleichung entdeckte Anderson am Caltech und zeitgleich auch Blackett in England das erste mal ein Antiteilchen. Es handelte sich um Positronen aus der kosmischen Strahlung. Es wurde eine Wilsonkammer (Nebelkammer) dazu verwendet. Dabei wird übersättigter Dampf erzeugt. Die geladenen Teilchen aus der kosmischen Strahlung erzeugen ionisierte Moleküle, die als Kondensationskeime wirken. So wird die Bahn des Teilchens sichtbar. (siehe Abbildung 2).

Um festzustellen, welches Ladungsvorzeichen das Teilchen hat, wurde die Wilsonkammer in ein Magnetfeld gebracht, in der die Ablenkung des Teilchens wegen der Lorenzkraft vom Ladungsvorzeichen abhängt. Schliesslich wurde eine Bleiplatte quer in die Wilsonkammer eingebaut, die die Teilchen etwas abbremst, Damit konnte man feststellen, ob das Teilchen von oben oder unten kam.

### 1.3 Streumatrix und Feynmanregeln

Diese Ausführungen folgen der Darstellung von [Halz84], Kap. 4 und 6. Es handelt sich nicht um eine vollständige Darstellung, stattdessen soll die Vorgehensweise, um einen Wirkungsquerschnitt theoretisch zu berechnen, anhand der folgenden zwei Beispiele erster Ordnung dargestellt werden.

Entdeckung des Positron.  
 Anderson 1932, CalTech  
 Expansionsnebelkammer, Magnetfeld, Bleiplatte

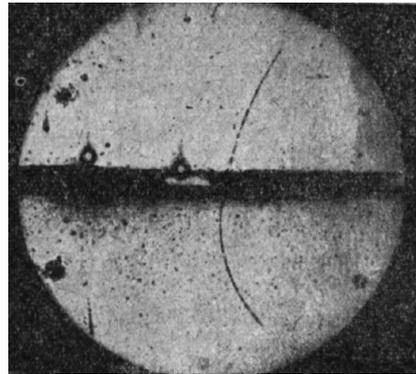
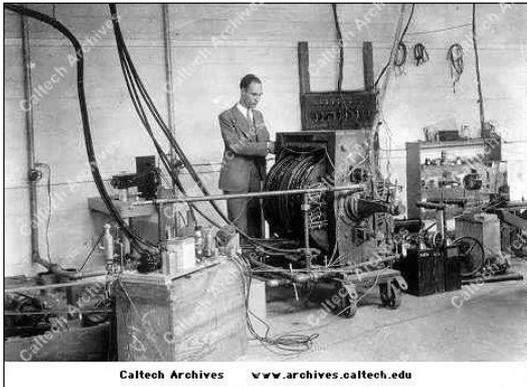
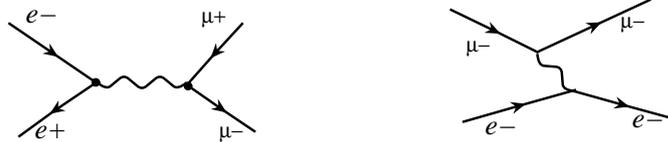


Abbildung 2: Der experimentelle Aufbau zur Entdeckung des ersten Antiteilchens, dem Positron in der kosmischen Strahlung durch Anderson 1932,



Wir streuen also zwei unterscheidbare Fermionen aneinander. Der linke Prozess passiert typisch in einem  $e^-e^+$  Collider, der rechte typischerweise bei  $\mu$  - Streuung an den Elektronen eines festen Targets.

Den linken Prozess nennt man s-Kanalstreuung, den rechten t-Kanalstreuung, in Anlehnung an die charakteristische Mandelstamvariable für das Austauschboson der Wechselwirkung:

$$\text{s-Kanal: } s = (p_A + p_B)^2 \quad (28)$$

$$\text{t-Kanal: } t = (p_A - p_C)^2 \quad (29)$$

s-Kanalstreuung ist zum Beispiel bei LEP relevant, wo dadurch die meisten Teilchen erzeugt werden können. t-Kanalstreuung ist wichtig bei HERA, wo Elektronen an Protonen bzw. dessen Bestandteilen streut ( $t = q^2$ ).

Betrachten wir die Streuung von Fermionen aneinander. Vor dem Streuprozess werden unsere Teilchen durch die freie Diracgleichung (25) beschrieben. Beeinflussen wir nun unser Teilchen durch ein - vorerst nicht quantisiertes - elektromagnetisches Feld. Wie man in der Elektrody-

namik lernt, muss man dann in der lorenzinvarianten Darstellung den Impuls ersetzen durch:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + e \cdot A^\mu \quad A^\mu = (V, \vec{A}) \quad (30)$$

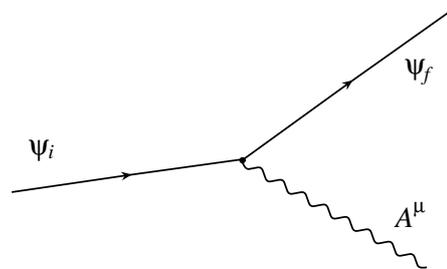
mit dem elektrostatischen Potential  $V$  und dem magnetischen Potential  $\vec{A}$ .

Machen wir diese Ersetzung in der Diracgleichung, erhalten wir:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = -e\gamma_\mu A^\mu \psi \quad (31)$$

Das freie Teilchen steht auf der linken Seite der Gleichung, ohne el. magnetische beeinflussung (ohne "Störung" wie man sagt) wird das null. Die rechte Seite stellt die Störung dar.

Nun sind aber die elektromagnetischen Felder auch quantisiert zu behandeln. Die kleinste mögliche Störung ist deshalb ein einzelnes Photon, das an der durchlaufenden Fermionlinie angreift:



Das Problem der Streuung wird nun mit Hilfe von Störungstheorie weiter behandelt (siehe [Halz84], Seite 79-80). Wir gehen wie in der klassischen Störungstheorie vor: Es seien  $\phi_n$  der zeitunabhängige Teil der Lösungen der Schrödingergleichung des freien Teilchens:

$$H_0 \phi_n(\vec{x}) = E_n \cdot \phi_n(\vec{x}) \quad (32)$$

mit  $n$  die Quantenzahlen und  $E_n$  die dazugehörigen Energieeigenwerten.

Nun schalten wir eine zeitabhängige Störung mit Potential  $V(\vec{x}, t)$  ein. Die Schrödingergleichung wird dann modifiziert durch

$$(H_0 + V(\vec{x}, t)) \psi(\vec{x}, t) = i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (33)$$

Zur Lösung macht man den Ansatz:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}) \cdot e^{-iE_n t} \quad (34)$$

Dieser Ansatz wird eingesetzt und daraus erhält man Differentialgleichungen für die  $a_n$ .

Die Lösungen für die  $a_n$  bilden die Elemente der sogenannten  $T$  - *Matrix* der Streutheorie. Das Betragsquadrat eines Elementes  $T_{fi}$  besagt, wie wahrscheinlich aus einem bestimmten

Ursprungszustand  $i$  ein bestimmter Endzustand  $f$  entsteht, wenn ein zeitlich beschränkte, kleine Störung eingeschaltet wird. Die  $T_{fi}$  heissen auch *Streuamplitude*.

Wendet man dies auf zwei durch die Diracgleichung beschriebenen Fermionen an, so erhält man für einen Prozess

$$A + B \rightarrow C + D \quad (35)$$

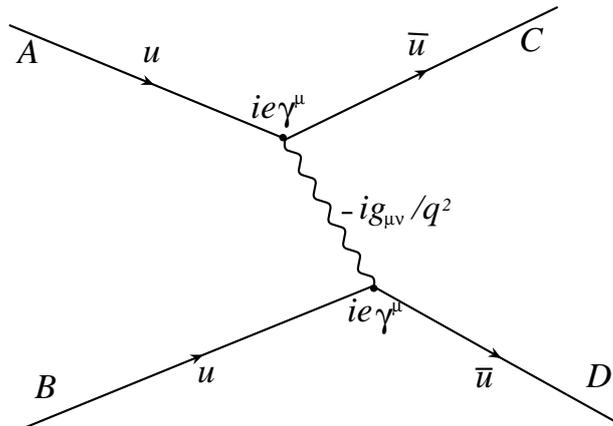
$$T_{fi} = -i(-e\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)\left(-\frac{1}{q^2}\right)(-e\bar{u}_D\gamma_\mu u_B)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \quad (36)$$

Die Deltafunktion stellt die Energie-Impulserhaltung sicher. Die drei ersten Klammern bezeichnet man zusammen oft als *Matrixelement*  $\mathcal{M}_{fi}$ , es enthält die Physik des Streuprozesses. Es ist dieser Ausdruck, den wir mit Hilfe der Feynmanregeln direkt aus den Grafen gewinnen können. Wir erkennen insbesondere den schon erwähnten Propagator mit der Virtualität des Austauschbosons im Nenner. Die einfachsten Regeln, die man für unseren Ersteordnungsprozess der Streuung zweier Fermionen braucht, lauten:

1. Einlaufende Antifermionen oder auslaufende Fermionen ergeben einen Faktor  $\overline{u(p)}$ .
2. Ein Vertex trägt einen Faktor  $ie\gamma^\mu$  bei.
3. Einlaufende Fermionen oder auslaufende Antifermionen ergeben einen Faktor  $u(p)$ .
4. Ein virtueller Propagator mit Ruhemasse  $M$  ergibt einen Faktor  $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 - M^2}$ .

Man überzeuge sich, dass diese Regeln auf diesen Feynmangraf angewendet, tatsächlich das angegebene Matrixelement ergeben, und dass dieses mit dem ersten Teil der Gleichung (36) übereinstimmt:

$$\mathcal{M} = \bar{u}_C(ie\gamma^\nu)u_A \cdot \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) \cdot \bar{u}_D(ie\gamma^\mu)u_B \quad (37)$$



Die vierte Regel enthält im Propagator auch die Ruhemasse  $M$ . Das ist zum Beispiel für die schwache Wechselwirkung relevant, wo das Austauschteilchen  $W$  oder  $Z$  eine grosse Masse

hat, und damit das Matrixelement sehr klein wird. Erst bei grossem Impulsübertrag wird die schwache Wechselwirkung mit der elektromagnetischen vergleichbar.

Man erkennt aus den Regeln, dass das Matrixelement nicht von der Lage des Grafen in den Orts-Zeitkoordinaten abhängt. Rotiert man den Grafen werden unter Umständen aus einlaufenden Fermionen auslaufende Antifermionen etc. Das ändert aber nach Regel 3 das Matrixelement nicht. Deshalb ist das Matrixelement für die beiden eingangs erwähnten Fälle s-Kanal und t-Kanal Streuung gleich! Die  $\delta$  Funktion ändert allerdings beim Drehen des Grafen, und damit ebenfalls die Berechnung des Wirkungsquerschnittes.

## 1.4 Vom Matrixelement zum Wirkungsquerschnitt

Eine ausführliche Darstellung dieses Schrittes findet man bei [Halz84], Kapitel 4.3. Die allgemeine Behandlung betrachtet die *Dichte der Endzustände* im Phasenraum und deren Normierung. Ausserdem muss man die Definition des Wirkungsquerschnittes (Gleichung 2) verwenden. Da es sich im wesentlichen um “Buchhaltung” handelt, wollen wir hier nur das Resultat für einen speziellen Fall angeben, der allerdings sehr häufig auftritt:

Wir betrachten den Prozess  $A + B \rightarrow C + D$ . Im Schwerpunktsystem (c.m.) seien die Impulse  $p_i := |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B|$ ,  $p_f := |\vec{p}_C| = |\vec{p}_D|$  und  $s = (E_A + E_B)^2$ . Dann wird der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}|_{c.m.} = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{p_f}{p_i} \cdot \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (38)$$

Mit  $\overline{|\mathcal{M}|^2}$  ist der Mittelwert über alle vorkommenden Helizitätszustände der einlaufenden Teilchen. Im Fall unpolarisierter einlaufender Teilchen (das heisst es kommen alle Helizitäten gleich häufig vor) muss man genauer über die einlaufenden Helizitäten mitteln, und über die erlaubten Helizitäten im Endzustand summieren. Das heisst es wird

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} := \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum |\mathcal{M}|^2 \quad (39)$$

Dabei läuft die Summe über aller möglichen Spinkombinationen der vorkommenden Spinoren. (Beachte, dass die verschiedenen Helizitätskombinationen unterscheidbare Prozesse sind, es gibt deshalb keine Interferenzen, man muss also die Wahrscheinlichkeiten der Einzelprozesse addieren). Jetzt hängt das Resultat also davon ab, wie der Feynmangraf im Orts-Zeitdigramm rotiert ist, d.h. welche Teilchen die EIngangs- und welche die Ausgangszustände sind.

Betrachten wir weiter den hochrelativistischen Spezialfall, wo wir beide Massen  $m$  und  $M$  vernachlässigen können, wird das Resultat besonders einfach.

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \quad \text{t-Kanal} \quad (40)$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2} \quad \text{s-Kanal} \quad (41)$$

Man beachte, dass diese Ausdrücke nun wieder lorentzinvariant sind, wie wir das vom Wirkungsquerschnitt natürlich erwarten!

Für den hochrelativistischen Grenzfall folgt aus der gleichen Rechnung ebenfalls die *Helizitätsregel*. Sie besagt, dass bei einer Streuung die durchlaufenden Fermionen ihre Helizität lieber beibehalten. Eine Aenderung der Helizität (sogenannte Spinflipreaktion) ist unwahrscheinlich und durch Winkelfunktionen entsprechend stark unterdrückt.

## 2 Streuexperimente und Resonanzproduktion

In der Teilchenphysik stellen Streuexperimente die zentrale experimentelle Untersuchungsmethode dar. Aus der Energie- und Winkelverteilung der gestreuten Teilchen lernen wir etwas über die Wechselwirkungen. Manchmal werden auch neue Teilchen produziert, und sie zerfallen wieder, wodurch man ebenfalls einiges über die Wechselwirkungen lernen kann.

Im hochrelativistischen Grenzfall werden die Massen aller Teilchen vernachlässigt. Im Schwerpunktsystem (center of mass) sind die Energien aller beteiligten Teilchen gleich (!)  $|k|$ ,  $k$  ist der 4er Impuls eines einlaufenden Teilchens im Schwerpunktsystem. Wir verwenden den Streuwinkel  $\theta$  im center-of-mass System und die Beziehungen

$$s = 4k^2 \quad t = -2k^2(1 - \cos \theta) = -s \sin^2(\theta/2) \quad u = -2k^2(1 + \cos \theta). \quad (42)$$

Es gilt die Helizitätsregel.

### 2.1 Streuung im s-Kanal

Der Wirkungsquerschnitt für Annihilation von einem Fermion-Antifermion paar in ein Photon und anschließender Paarerzeugung zweier anderer Fermionen können wir nun im hochrelativistischen Grenzfall mit den Gleichungen (38), (40) und (42) angeben. Wir erhalten ( $\alpha = e^2/4\pi$ )

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \quad (43)$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration über  $\theta$  und  $\phi$ :

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (44)$$

[Etwas komplizierter ist der Fall, wenn wieder Elektronen erzeugt werden ( $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ , sogenannte Bhabha-Streuung). Dann müssen die Graphen für s-Kanal und t-Kanal - Streuung kohärent addiert werden.]

Als Beispiel betrachten wir die Reaktion

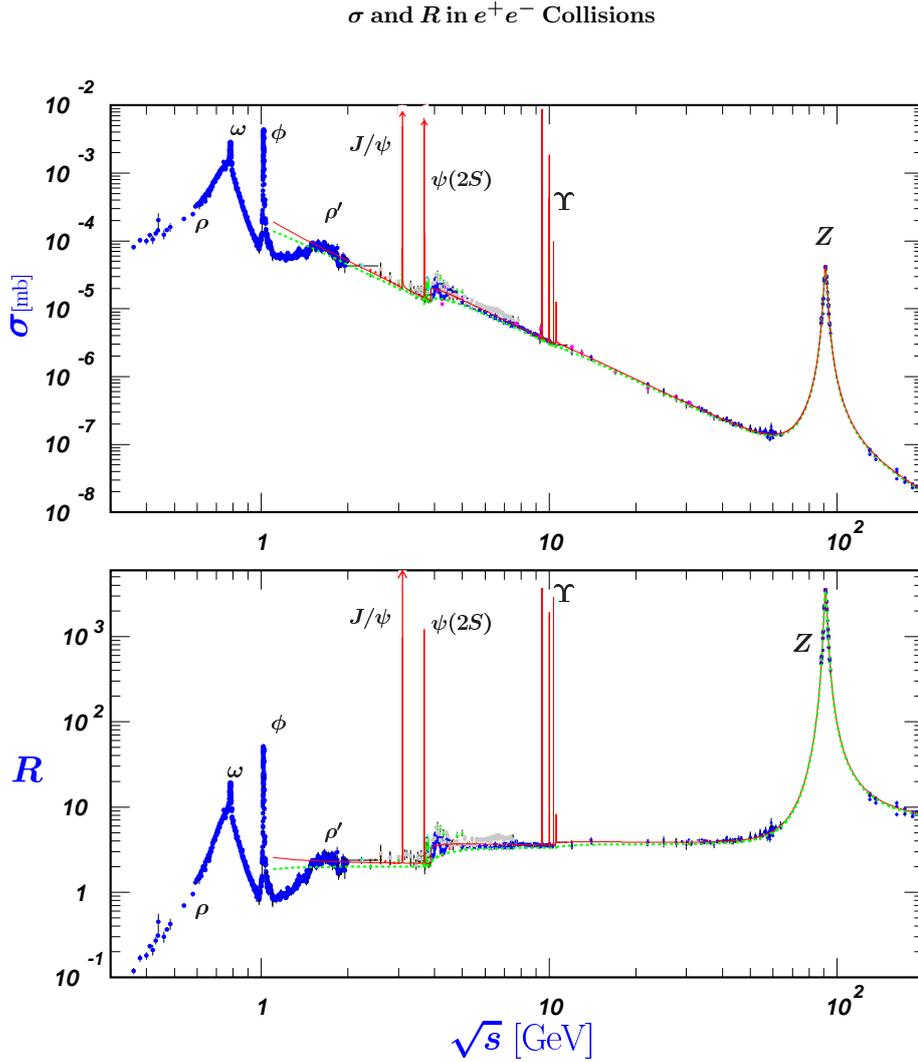
$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} \quad (45)$$

also die Produktion von Quarkpaaren aus der Elektron-Positron Annihilation. Wir müssen dabei berücksichtigen, dass die Quarks nur  $e_q = 1/3$  oder  $2/3$  der Elementarladung haben. Der eine Vertexfaktor muss also entsprechend korrigiert werden ( $\sqrt{\alpha} \rightarrow \sqrt{\alpha} \cdot e_q$ ), es gilt dann:

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow q + \bar{q}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} e_q^2 \quad \text{mit} \quad e_q = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad e_q = \frac{2}{3} \quad (46)$$

Die Abbildung 3 zeigt, dass in der Tat der Wirkungsquerschnitt generell mit  $1/s$  abfällt. Bei  $s=3.5$  bzw. bei  $s=10$  GeV wird der Wirkungsquerschnitt etwas angehoben, da ab diesen Schwellwerten die Energie reicht, um auch die schwereren Quarks (charm  $c$  bzw. beauty  $b$ ) in Paaren erzeugt werden können.

$$e^+ + e^- \rightarrow c + \bar{c} \quad \text{bzw.} \quad e^+ + e^- \rightarrow b + \bar{b} \quad (47)$$



**Figure 40.6:** World data on the total cross section of  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$  and the ratio  $R(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)$ .  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s)$  is the experimental cross section corrected for initial state radiation and electron-positron vertex loops,  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s) = 4\pi\alpha^2(s)/3s$ . Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are an educative guide: the broken one (green) is a naive quark-parton model prediction and the solid one (red) is 3-loop pQCD prediction (see “Quantum Chromodynamics” section of this Review, Eq. (9.12) or, for more details, K. G. Chetyrkin *et al.*, Nucl. Phys. **B586**, 56 (2000) (Erratum *ibid.* **B634**, 413 (2002)). Breit-Wigner parameterizations of  $J/\psi$ ,  $\psi(2S)$ , and  $\Upsilon(nS)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  are also shown. The full list of references to the original data and the details of the  $R$  ratio extraction from them can be found in [arXiv:hep-ph/0312114]. Corresponding computer-readable data files are available at <http://pdg.ihep.su/xsect/contents.html>. (Courtesy of the COMPAS(Protvino) and HEPDATA(Durham) Groups, August 2005. Corrections by P. Janot (CERN) and M. Schmitt (Northwestern U.)) See full-color version on color pages at end of book.

Abbildung 3: Der totale Wirkungsquerschnitt (oben) für die Reaktion  $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$  als Funktion der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$ . Die untere Abbildung zeigt den auf  $4\pi\alpha^2/s$  normierte Wirkungsquerschnitt

Zusätzlich werden bei der richtigen Energie durch Resonanzproduktion gebundene Zustände der Quarks erzeugt, sogenannte Quarkonia. *Resonanzproduktion* erhält man, wenn zwei Teilchen derart aufeinanderstossen, dass die Gesamtenergie  $\sqrt{s} = E_1 + E_2$  gerade richtig ist, um die Masse  $M$  eines neuen Teilchens zu erzeugen. Der Wirkungsquerschnitt dafür ist in der Regel proportional zur *Breit-Wigner Formel*:

$$\sigma \sim \frac{1}{(\sqrt{s} - M)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \quad (48)$$

Dabei ist  $\Gamma = 1/\tau$  die Massenbreite des Zustandes und  $\tau$  die Lebensdauer eines Teilchens.

Beispiele (Abbildung 3) dafür sind das  $J/\psi$  Teilchen, das ein  $c\bar{c}$ , also ein Atom aus einem charm Quarkpaar, darstellt und das  $\Upsilon = (b\bar{b})$ . Das  $\omega$  besteht aus einer Kombination von  $u$  und  $d$  Quarks und  $\phi = (s\bar{s})$ . Die hier erwähnten Quarkonia sind sogenannte Vektorteilchen, das heisst sie haben den Spin 1, wie das virtuelle Photon, das für die Wechselwirkung verantwortlich ist. Das heisst Quark und Antiquark haben ihre Spins parallel.

Bei etwa 90 GeV wird das  $Z$  Teilchen, eines der Wechselwirkungsbosonen der schwachen Wechselwirkung erzeugt. Das  $Z$  Teilchen kann in ein Quarkpaar, in ein geladenes Leptonpaar oder in ein Neutrinopaar zerfallen.

## 2.2 Streuung im t-Kanal

Lassen wir zwei unterscheidbare, geladene Fermionen aneinander durch Austausch eines Photons aneinander streuen, so erhält man dafür wieder aus (38), (40) und (42):

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s \sin^4(\theta/2)} (1 + \cos^4(\theta/2)) = \frac{s \cdot \alpha^2}{2t^2} (1 + \cos^4(\theta/2)) \quad s \gg m_1, m_2 \quad (49)$$

Das ist nichts anderes als der hochenergetische Grenzfall der Rutherfordstreuung! Sie spielt in der Teilchenphysik eine grosse Rolle, zum Beispiel HERA: Elektron-Quarkstreuung. (siehe nächstes Kapitel).

Oft möchte man lieber die Abhängigkeit von  $t = q^2$  haben. Mit  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  und  $t = -s \sin^2(\theta/2)$  wird der Umrechnungsfaktor  $d/d\Omega = (s/4\pi) d/dt$ . Damit erhält man

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = 2\pi\alpha^2 \frac{1}{t^2} (1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}) \quad (50)$$

Man beachte, dass in diesem Prozess  $t$  negativ ist. Die '1' in der Klammer steht für den Fall, dass die beiden Helizitäten der einlaufenden Teilchen gleich, der Gesamtspin also null ist, der zweite Term in der Klammer ist fuer den Fall, dass die beiden Helizitäten verschieden sind, der Gesamtspin also 1. Im Gegensatz zur s-Kanal Streuung ist hier aber in jedem Fall die Streurrate bei kleinem Winkel  $\theta$  (in "Vorwärtsrichtung") viel grösser.

### 3 Tiefunelastische Streuung

Die klassische Methode des Kern- und Teilchenphysikers besteht darin, ein Projektil (zum Beispiel Elektron, Myon oder Neutrino) mit Impuls  $k$  mit bekannten Eigenschaften und Wechselwirkungen in das zu untersuchende Objekt, zum Beispiel ein Atomkern, zu schießen. Analysiert werden die Eigenschaften des gestreuten Projektils, insbesondere der Streuwinkel  $\theta$  und der Impuls des gestreuten Projektils  $k'$ . Man vergleicht den gemessenen Wirkungsquerschnitt mit dem eines punktförmigen Objektes, den Unterschied nennt man den *Formfaktor*  $F$ :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{\text{point}} \cdot F(q^2) \quad (51)$$

Dabei ist  $q = k - k'$  der 4er Vektor des Impulsübertrages. Am Beispiel des Atomkernes haben wir gesehen, dass aus dem Formfaktor der elektromagnetischen Streuung am Kern, durch Fouriertransformation die elektrische Ladungsverteilung des Kernes bestimmt werden konnte.

Wollen wir die starke Wechselwirkung experimentell untersuchen, sehen wir uns unmittelbar mit dem Problem konfrontiert, dass – im Gegensatz zu den Objekten der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung – die *Quarks* und *Gluonen* in der Natur gar nicht frei vorkommen. Das in der Einleitung bereits erwähnte über alle Grenzen steigende Wechselwirkungspotential erzeugt aus dem Vakuum so lange Quark- Antiquarkpaare, bis ein farbneutrales Objekt, ein *Hadron*, entstanden ist. Dieser Effekt heisst *confinement* und als Hadronen kommen Mesonen ( $q\bar{q}$ ) und Baryonen ( $qqq$ ) in Frage.

In der sogenannten *Tiefunelastischen Streuung* werden nun Elektronen oder Muonen mit soviel Energie in ein Proton geschossen, dass einzelne Quarks herausgeschlagen werden können. Es streut also ein Elektron an einem Quark in t-Kanal Streuung. Das Quark kann wegen dem confinement aber nicht frei existieren, sobald es aus dem Proton ausgetreten ist, wird es *hadronisiert*. Statt dem Quark detektieren wir einen eigentlichen Teilchenschauer, den sogenannten *jet*. Durch Analyse solcher Daten können wir die Eigenschaften der starken Wechselwirkung im Proton untersuchen.

#### 3.1 Beispiel eines Ereignisses der tiefunelastischen Streuung

Die folgende Abbildung 4 zeigt ein solches Ereignis, das mit dem Experiment H1 bei HERA am DESY in Hamburg gemessen wurde.

Das Elektron kam von links und wird in den oberen Teil des Detektors gestreut. Das Proton kam von rechts. Das gestreute Quark wird als jet im unteren Teil detektiert. Der Rest des Protons hadronisiert ebenfalls, fliegt aber im Strahlrohr weiter, sodass er nicht vollständig detektiert werden kann. Man kann aber einzelne Signale im Detektorteil links erkennen, die von der Hadronisierung des Protonrests herrühren.

Der H1-Detektor besteht wie die meisten Beschleunigerexperimente aus einem Aufbau von konzentrischen Detektoren. Von innen nach aussen werden folgende Detektorteile verwendet:

1. Der *Vertexdetektor* bestimmt den Ursprungsort der Spuren durch genauest mögliche Ortsauflösung, in der Regel mit Hilfe von Silizium-pixel-sensoren (kleine schwarze Rechtecke in der Abbildung).

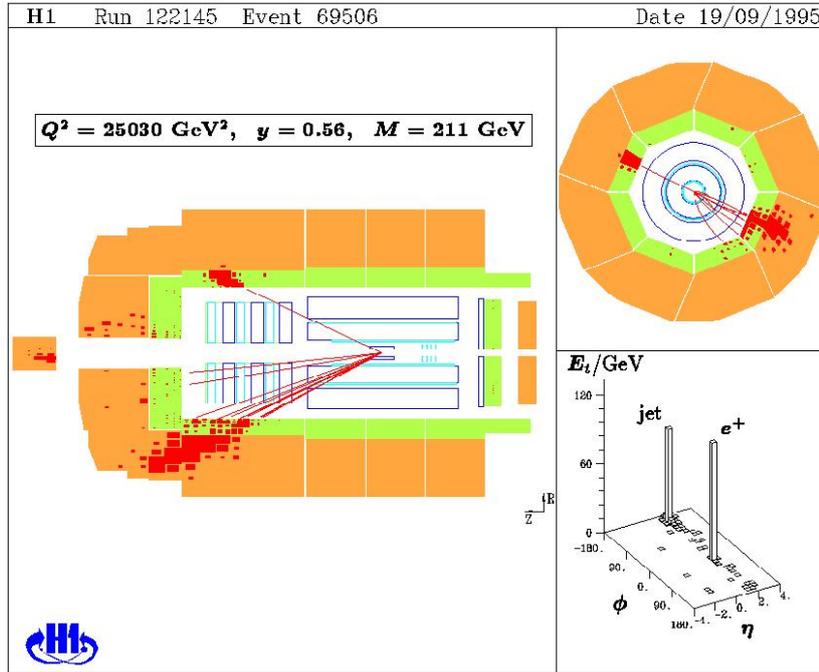


Abbildung 4: Tiefunelastisches Ereignis, gemessen mit H1 bei HERA. Links eine Seitenansicht (Protonen kommen von rechts, Elektronen von links), rechts oben eine Ansicht in Protonflugrichtung, rechts unten die im Detektor gemessenen Energien als Funktion der Winkel.

2. Der *Trackingdetektor* (grosse schwarze Rechtecke) detektiert meist mit Hilfe von Ionisationsspuren in Gasen die Bahnen der geladenen Teilchen. Er befindet sich in einem Magnetfeld, sodass die Impulse und Ladungsvorzeichen der Detektoren bestimmt werden können.
3. Das *Kalorimeter* (grün und gelb) detektiert Photonen, Elektronen und Teilchenjets, indem es diese vollständig abbremst. Die dabei entstehende totale Ionisationsladung (oder das Szintillationslicht) ist proportional zur Energie des Teilchenshowers.
4. Der *Muondetektor* befindet sich ausserhalb des Kalorimeters, das als Filter fuer alle anderen Teilchen dient. Mit Hilfe von Spurdetektoren in einem Magnetfeld werden die Muonen iudentifiziert und deren Impuls besonders genau bestimmt. (Im Beispiel - Bild ist der Muondetektor nicht eingezeichnet).

### 3.2 Unelastische Streuung

Mit unelastischer Streuung ist allgemein gemeint, dass das Target sich beim Streuvorgang in mehrere Bruchteile zerlegt. Das setzt natürlich primär voraus, dass es sich überhaupt um ein zusammengesetztes Objekt handelt. Wir wollen vorerst möglichst wenig über die Natur des Zerlegungsvorganges annehmen. Man charakterisiert die Gesamtheit der Bruchstücke des Objektes mit ihrer invarianten Masse  $W$ . Es gilt die Energie- und Impulserhaltung

$$k' = k - q \quad W = \sqrt{(p + q)^2} \quad \Rightarrow \quad W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2p \cdot q + q^2 \quad (52)$$

mit den 4er Impulsen  $k$  für das einlaufendes Elektron mit vernachlässigter Masse,  $k'$  für auslaufende Elektron,  $p$  für das einlaufende Proton mit Masse  $M$  und  $q$  für den 4er Impulsübertrag.

Mit dieser invarianten Masse  $W$  (auch *Masse des hadronischen Endzustandes* genannt) haben wir einen weiteren freien Parameter für den Streuprozess. Dieser ist jetzt also durch zwei Zahlen festgelegt. Es ist immer  $W \geq M$ , mit  $W = M$  im elastischen Fall, wenn das Proton intakt bleibt. Es werden üblicherweise zwei dimensionslose Zahlen  $x$  und  $y$  definiert:

Als Mass für die *Unelastizität* wird die dimensionslose Grösse  $x$  oder manchmal  $\omega$  eingeführt mit

$$\omega := \frac{1}{x} := 1 - \frac{W^2 - M^2}{q^2} = -\frac{2q \cdot p}{q^2} \quad (53)$$

Da  $q^2 < 0$  und  $W > M$  ist  $x$  immer kleiner 1. Die Grösse  $q \cdot p$  ist immer positiv, wie man sich zum Beispiel durch Ausrechnen im Ruhesystem der Masse  $M$  überzeugen kann:  $p \cdot q = M \cdot q_0$ . Also ist  $x > 0$  und somit

$$0 \leq x \leq 1. \quad (54)$$

Dabei bedeutet  $x = 1$ , dass  $W^2 = M^2$ , also der elastische Grenzfall mit  $q^2 = -2p \cdot q$ . Wie wir im naechsten Kapitel demonstrieren, ist  $x$  gerade der Bruchteil des Protonimpulses, der an der inelastischen Streuung teilnimmt.

Die Definition für  $y$ , lautet

$$y := \frac{p \cdot q}{p \cdot k}. \quad (55)$$

Dies ist ein ähnlicher Ausdruck wie  $1/x$ , aber normiert (statt auf  $q^2$ ) auf eine Grösse, die etwa der Schwerpunktsenergie  $s = (p + k)^2 = M^2 + 2p \cdot k$  entspricht. Setzt man  $q = k - k'$  in die Definition ein, erhält man

$$y = 1 - \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} \approx 1 - \frac{|k'|}{|k|} \left( \frac{1 - \cos \Theta}{2} \right) = 1 - \frac{|k'|}{|k|} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (56)$$

wobei  $\Theta = \pi - \theta$  der Winkel ist, den  $k'$  und  $p$  einschliessen. Die Formel gilt für  $p, k \gg M$ . Im Targetruhesystem, also  $p = (M, 0, 0, 0)$ , erhält man

$$y = 1 - \frac{|k'|}{|k|} \quad (57)$$

Die anschauliche Bedeutung von  $y$  ist also der relative Energieverlust des Elektrons bei der Streuung, gemessen im Ruhesystem des Protons.

(Beachte, dass bei HERA jeweils  $\Theta$  statt  $\theta$  gemessen wird, in allen Formeln muss also  $\sin^2(\theta/2)$  mit  $\cos^2(\theta/2)$  und vice versa ersetzt werden.)

Wenn man die beiden Definitionen für  $x$  und  $y$  miteinander multipliziert, erhält man den Zusammenhang ( $Q^2 := -q^2$ ):

$$\boxed{x \cdot y = \frac{Q^2}{s - M^2}} \quad (58)$$

Man erkennt, dass nur zwei der für den einzelnen Streuprozess relevanten lorentzinvarianten Parameter  $x, y, Q^2$  voneinander unabhängig sind.

Im elastischen Fall ist  $x = 1$  und  $y = \sin^2(\theta/2)$  ( $\theta =$  Streuwinkel im Schwerpunktsystem). Grosses  $y$  bedeutet also Rückwärtsstreuung. Insbesondere kann man diesen Formalismus für

die elastische t-Kanalstreuung Elektron - Quark - Streuung verwenden. Aus Formel (49) nach Multiplikation mit der Quarkladung  $e_q^2$  der folgende lorenzinvariante Ausdruck gewonnen werden: Mit

$$dy = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (59)$$

$$dQ^2 = s \cdot dy \quad (60)$$

wird der Wirkungsquerschnitt in Funktion von  $y$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2 s}{q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2), \quad (61)$$

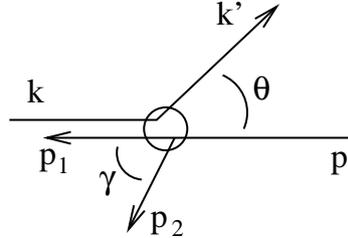
und in Funktion von  $Q^2$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial Q^2}\right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \quad (62)$$

jeweils für  $s \gg M^2$ . Beachte, dass es für diesen elastischen Fall nur noch eine unabhängige Variable gibt:  $y$  und  $Q^2$  hängen über  $Q^2 = ys$  zusammen.

### 3.2.1 Beispiel für $x$ als Impulsanteil des Streuobjekts

Das folgende hypothetische Beispiel soll das Wesen dieser Formalismen veranschaulichen. Wir nehmen den besonders einfachen Fall an, dass das zu untersuchende Objekt sich gerade in zwei Teile mit 4er Impulsen  $p_1$  und  $p_2$  zerlegt, und zwar so, dass alle 4er Vektoren in einer Ebene liegen sollen. Weiter soll  $p_1$  parallel zu  $p$  weiterlaufen, und  $p_2$  wird unter dem Winkel  $\gamma$  gestreut.



Es gilt folgende Energie- und Impulserhaltung:

$$p_1 + p_2 + k' = p + k \quad (63)$$

Das sind drei Gleichungen, da eine Raumkomponente trivialerweise null ist. Wir haben aber fünf Unbekannte, nämlich  $|p_1|, |p_2|, \gamma, |k'|, \theta$ . Es bleiben also tatsächlich wie behauptet zwei unabhängige Freiheitsgrade für den Prozess.

Die invariante Masse der beiden Teile wird dann:

$$W^2 = (p_1 + p_2)^2 = 4 |p_1| |p_2| \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (64)$$

wenn man die Massen der beiden Teile vernachlässigt.

Aus Impulserhaltungsgründen sind die transversalen Komponenten von  $p_2$  und  $k'$  gleich. Wir suchen uns nun das Inertialsystem, das parallel zur Strahlrichtung der Protonen  $z$  laufen soll,

und für das  $\gamma = \theta$  gilt. Darin muss demnach  $|k'| = |p_2|$  gelten. Deshalb bleibt im Endzustand nur der Impuls  $p_1$  übrig. Wir stellen die Impulsbilanz entlang  $z$  auf:

$$|p| - |k| = |p_1| \quad (65)$$

Für den übertragenen Impuls  $q$  gilt

$$k' = k - q, \quad p_1 + p_2 = p + q \quad (66)$$

Wir rechnen das Quadrat des zweiten Ausdruckes in (66) aus und vernachlässigen alle Massen:

$$2p_1 \cdot p_2 = 2p \cdot q + q^2 \quad (67)$$

$$2|p_1||p_2|(1 - \cos \gamma) = q^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (68)$$

$$4|p_1||p_2| \sin^2 \frac{\gamma}{2} = -4|k||k'| \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (69)$$

$$|p_1| = -(|p| - |p_1|) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (70)$$

$$|p_1| = |p| \cdot (1 - x) \quad (71)$$

Das nicht abgelenkte Bruchstück  $p_1$  hat also gerade einen Bruchteil  $1 - x$  des ursprünglichen Impulses  $p$  des Objektes, der restliche Impulsanteil  $x$  hat an der Wechselwirkung teilgenommen. Wir können also in diesem Fall  $x$  als den Bruchteil des Impulses interpretieren, der an der Wechselwirkung teilnimmt.

Beachte, dass diese Interpretation an diesem Beispiel möglich ist, ohne dass irgendwelche Annahmen über ein Partonmodell oder gar eine Wechselwirkung im Proton gemacht werden.

### 3.3 Partonmodell und Strukturfunktionen

Wir wollen jetzt versuchen, Annahmen über die Bestandteile des Protons zu machen, die das streuende Lepton im Proton sieht. Das naive Partonmodell nimmt an, dass das Proton aus masselosen Fermionen, den Quarks, besteht, die sich alle parallel zum Protonimpuls bewegen. Die Streuung des Elektrons erfolgt dann nach Formel (61) an jeweils einem Quark, das vor dem Stoss den Impuls  $x \cdot p$  hat. Der Rest des Protons hat den Impuls  $(1 - x) \cdot p$  und fliegt ungehindert geradeaus weiter, wie im obigen Beispiel beschrieben.

Die Wahrscheinlichkeit  $dW$ , ein Parton mit dem Impuls  $xp$  in der Intervallbreite  $dxp$  anzutreffen, sei  $q(x) \cdot dx$ . Die Funktionen  $q(x)$  heissen Partondichten. Wir müssen nun den Wirkungsquerschnitt (62) noch mit dieser Wahrscheinlichkeit multiplizieren:

$$\left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} \right) = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \cdot q(x). \quad (72)$$

Natürlich kann unser elektromagnetischer Streuprozess genauso gut an einem Antiquark passieren, falls solche vorhanden sind. Wir können mit Hilfe der elektromagnetischen Wechselwirkung Quarks und Antiquarks nicht unterscheiden. Die Dichteverteilung der Antiquarks

bezeichnet man mit  $\bar{q}(x)$ . Schliesslich erweitern wir aus Konventionsgründen den Ausdruck mit  $x$ :

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2}\right) = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \cdot (xq(x) + x\bar{q}(x)) \quad (73)$$

Die Quarkdichteverteilungen sind nicht apriori bekannt und sollen gemessen werden. Man fasst zusammen:

$$\boxed{F_2 = e_q^2 \cdot (xq(x) + x\bar{q}(x))} \quad (74)$$

$F_2$  heisst die Strukturfunktion. Diese Gleichung heisst auch die *Master - Gleichung des Partonmodells*.

Zusammengefasst wird also der Wirkungsquerschnitt für Elektron-Protonstreuung mit elektromagnetischer Wechselwirkung:

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2}\right) = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} (1 + (1 - y)^2) \cdot F_2(x, Q^2) \quad (75)$$

Man misst experimentell  $F_2$  und vergleicht es mit theoretischen Vorhersagen über den Verlauf von  $F_2$ , bzw. den Verlauf der  $q(x)$ . Man beachte, dass im Partonmodell die Strukturfunktionen nur von  $x$  und nicht von  $Q^2$  abhängig ist, als  $F_2(x)$ . Diese Tatsache heisst Skalenverhalten (*Bjorken scaling*).

### 3.4 Skalenverletzung

Bei der Herleitung von (75) haben wir die Streuformel(61) benützt, welche wiederum unter der Annahme gewonnen wurde, dass die Quarkmassen vernachlässigt werden können, es wurde zum Beispiel  $u := (k - p')^2 \approx -2k' \cdot p \approx s \cdot (y - 1)$  angenommen.

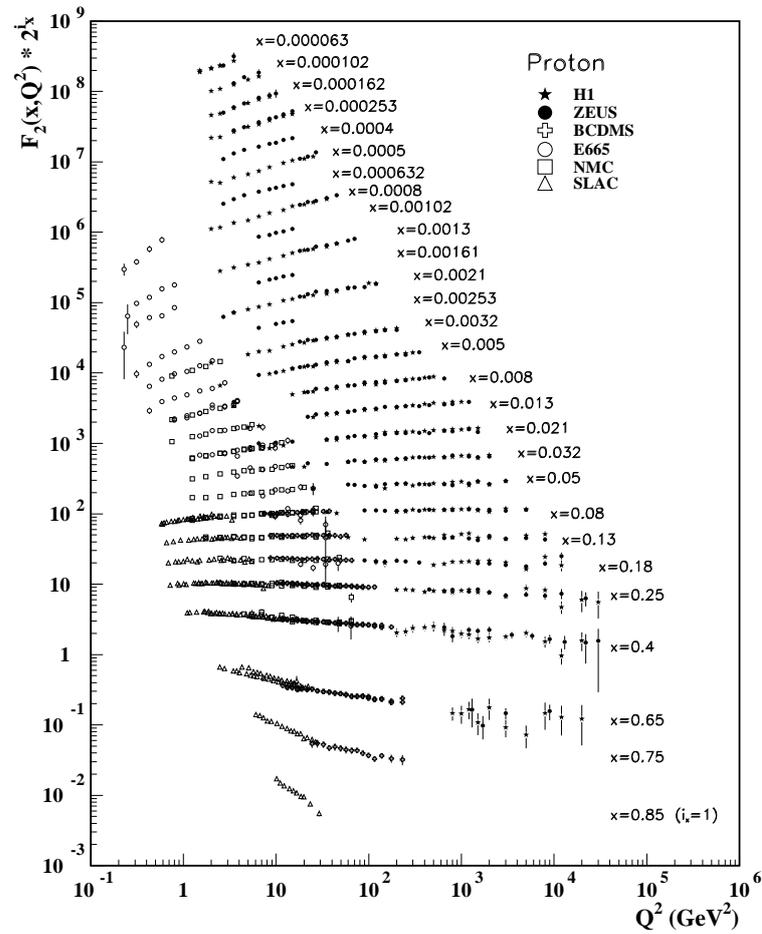
Ein aus einem Gluon entstandenes, virtuelles Quark hat aber zweifellos eine signifikante Virtualität, das heisst  $p^2 > 0$ .

Ausserdem haben wir angenommen, dass der Partonimpuls parallel zum Protonimpuls liegt, der transversale Impuls also verschwindet. Deshalb konnten wir für die Beschreibung des Partonimpulses mit nur einer Zahl  $x$  auskommen. Für aus Gluonen fluktuierende Quarks ist dies aber offensichtlich nicht mehr richtig.

Man erwartet also nur dann ein Skalenverhalten der Strukturfunktionen, falls die Bestandteile des Proton aus punktförmigen, masselosen und reellen Fermionen besteht, die keine transversale Impulskomponente besitzen.

Das Fallenlassen dieser Einschränkungen bewirkt in erster Linie, dass die Strukturfunktion  $F_2$  auch von  $Q^2$  abhängig wird, das Skalenverhalten also verletzt wird. Die Abbildung zeigt gemessene Funktionen  $F_2(x, Q^2)$ . Wegen der Skalenverletzung steigt die Strukturfunktion  $F_2$  bei kleinen  $x$  an mit  $Q^2$ , da dann mit der grösseren Virtualität des Austauschphotons mehr aus Gluonen entstandene virtuelle Quarkpaare gesehen werden. Bei grossem  $x$  sinkt die Strukturfunktion mit  $Q^2$ , wo es immer wahrscheinlicher wird, dass das untersuchte Quark (bei grossem  $x$  meist ein Valenzquark) gerade ein Bremsstrahlungsgluon abgestrahlt hat, und somit ein kleineres  $x$  hat als eigentlich erwartet. Die Daten (Abbildung 5) zeigen tatsächlich ein solches Verhalten.

NOTE: THE FIGURES IN THIS SECTION ARE INTENDED TO SHOW THE REPRESENTATIVE DATA. THEY ARE NOT MEANT TO BE COMPLETE COMPILATIONS OF ALL THE WORLD'S RELIABLE DATA.



**Figure 16.6:** The proton structure function  $F_2^p$  measured in electromagnetic scattering of positrons on protons (collider experiments ZEUS and H1), in the kinematic domain of the HERA data, for  $x > 0.000063$  (cf. Fig. 16.9 for data at smaller  $x$  and  $Q^2$ ), and for electrons (SLAC) and muons (BCDMS, E665, NMC) on a fixed target. Statistical and systematic errors added in quadrature are shown. The data are plotted as a function of  $Q^2$  in bins of fixed  $x$ . Some points have been slightly offset in  $Q^2$  for clarity. The ZEUS binning in  $x$  is used in this plot; all other data are rebinned to the  $x$  values of the ZEUS data. For the purpose of plotting,  $F_2^p$  has been multiplied by  $2^{i_x}$ , where  $i_x$  is the number of the  $x$  bin, ranging from  $i_x = 1$  ( $x = 0.85$ ) to  $i_x = 28$  ( $x = 0.000063$ ). References: **H1**—C. Adloff *et al.*, Eur. Phys. J. **C21**, 33 (2001); C. Adloff *et al.*, Eur. Phys. J. **C30**, 1 (2003); **ZEUS**—S. Chekanov *et al.*, Eur. Phys. J. **C21**, 443 (2001); S. Chekanov *et al.*, Phys. Rev. **D70**, 052001 (2004); **BCDMS**—A.C. Benvenuti *et al.*, Phys. Lett. **B223**, 485 (1989) (as given in [54]); **E665**—M.R. Adams *et al.*, Phys. Rev. **D54**, 3006 (1996); **NMC**—M. Arneodo *et al.*, Nucl. Phys. **B483**, 3 (1997); **SLAC**—L.W. Whitlow *et al.*, Phys. Lett. **B282**, 475 (1992).

Abbildung 5: Proton Strukturfunktion  $F_2$  als Funktion von  $Q^2$ . [PDG06]

Das detaillierte Studium des Skalenverletzung erlaubt es also, die Effekte der starken Wechselwirkung zu studieren, und mit den Vorhersagen der Quantenchromodynamik zu vergleichen.

## Literatur

- [Frau99] H. Frauenfelder, E.M. Henley: *Teilchen und Kerne*, 4. Auflage, Oldenbourg 1999.
- [Mart92] B.R. Martin, G. Shaw: *Particle Physics*, John Wiley 1992.
- [Povh95] B. Povh, K. Rith, C. Scholz und F. Zetsche: *Teilchen und Kerne*, Springer 1995.
- [Halz84] F. Halzen, A. D. Martin: *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley, 1984.
- [PDG06] Particle Data Group: *Review of Particle Physics*, W.-M. Yao et al., J. Phys. G 33, 1 (2006), Aktualisierte Informationen auf <http://pdg.web.cern.ch/pdg/>