

Strahlung und Materie: Teil II

2. November 2006

Laura Baudis, lbaudis@physik.rwth-aachen.de
Physikalisches Institut Ib, RWTH Aachen

Zusammenfassung Teil I (Phänomenologie)

- Strahlungsfeld
- Intensität I_ν , Energiefluss (Energie/Flächeneinheit), Leuchtkraft, Strahlungsstrom
- thermodynamisches Gleichgewicht: Strahlung ist isotrop und $I_\nu = B_\nu(T)$ (Planck-Funktion)
- Hohlraumstrahlung (Strahlung eines schwarzen Körpers) $I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$
- Wiensche's Verschiebungsgesetz $\lambda_{\max} T = 0.290 \text{ cm K}$
- Grenzfälle: $\nu \gg \nu_{\max} : B_\nu(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot e^{-h\nu/kT}$, $\nu \ll \nu_{\max} : B_\nu(T) \approx \frac{2h\nu^2}{c^2} \cdot kT$
- Totale Flächenhelligkeit (Stefan-Boltzmann Gesetz): $F = \int_{\nu} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} B_\nu(T) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi d\nu = \sigma_B T^4$
- Strahlungstransportgleichung $I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu$ mit $d\tau_\nu = \kappa_\nu ds$, $S_\nu = \epsilon_\nu / \kappa_\nu$
- im LTE: $\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu (I_\nu - B_\nu(T(s)))$
- Dopplereffekt $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v_r}{c}} - 1$; Magnitudenskala $\frac{S_1}{S_2} = 10^{-0.4(m_1 - m_2)}$

Zustandsgleichung

- Beim Studium von astrophysikalischen Systeme haben wir es mit sehr unterschiedlichen Dichten zu tun (Sterne $\sim 1\text{gcm}^{-3}$, n-Sterne $\sim 10^{14}\text{gcm}^{-3}$, etc) => Materie in sehr verschiedenen Zuständen
- Die Beschreibung der Materie kann (iA) vereinfacht werden, falls wir die Zustandsgleichung benutzen: dh Beziehungen zwischen Druck, Dichte, Temperatur:

$$P = P(\rho, T) \quad \text{Druck}$$

$$u = u(\rho, T) \quad \text{Energiedichte}$$

- Für das klassische ideale Gas (kinetische Energie dominiert!):

$$P_{gas} = nkT$$

$$u_{gas} = \frac{3}{2}nkT = \frac{3}{2}P_{gas}$$

- Im Allgemeinen kann die [Zustandsgleichung](#) eines Gases mit der kinetischen Theorie aus der Impuls- oder Energieverteilungsfunktion der Teilchen bestimmt werden

Kinetische Theorie der freien Teilchen

- Verteilungsfunktion: $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 r d^3 p$ Anzahl der Teilchen die sich zur Zeit t im Volumenelement $d^3 r = dV$ am Ort r aufhalten, und Impulse p besitzen.
- Gesamtzahl der Teilchen $N = \int d^3 r \int d^3 p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$
- Betrachte Würfel mit $V=L^3$ und N Teilchen \Rightarrow Teilchendichte = $n_0=N/L^3$. Sei $n(p)$ die (isotrope) Verteilungsfunktion der Impulse. Wir erhalten:

$$n = \int_0^{\infty} n(p) d^3 p = \int_0^{\infty} n(p) 4\pi p^2 dp$$

- Der Druck auf eine Wand (pro Zeit und Fläche übertragener Impuls $d\mathbf{p}$):

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{1}{L^2} \frac{dp}{dt}$$

Kinetische Theorie der freien Teilchen

- Impuls auf die Wand senkrecht zur x-Richtung

$$d\mathbf{p} = \int_0^{\infty} \underbrace{2p_x}_{\text{übertragener Impuls/Teilchen}} \underbrace{v_x dt L^2}_{\text{Teilchen in V erreichen die Wand in dt}} \underbrace{n(\mathbf{p}) d^3 p}_{\text{Dichte der Teilchen mit Impuls p}}$$

übertragener Impuls/Teilchen

Teilchen in V erreichen die Wand in dt

Dichte der Teilchen mit Impuls p

- Für eine isotrope Impulsverteilung (in sphärischen Polarkoordinaten):

$$p_x = p \sin \theta \cos \varphi$$


$$v_x = v(p) \sin \theta \cos \varphi$$

$$d^3 p = p^2 \sin \theta d\theta d\varphi dp$$

Kinetische Theorie der freien Teilchen

- Nach Einsetzen erhalten wir für den **Druck**:

$$P = \frac{1}{L^2} \frac{dp}{dt} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2p v(p) n(p) p^2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi dp$$


$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v(p) n(p) 4\pi p^2 dp$$

- => der Druck wird durch die Impulsverteilung der Teilchen bestimmt!

- Die **Energiedichte** der Teilchen ist:
$$u_{kin} = \int_0^\infty \varepsilon(p) n(p) 4\pi p^2 dp$$

$\varepsilon(p)$ = kinetische Energie des Teilchens mit Impuls p

$$\varepsilon(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} & (p \ll mc, \text{NR}) \\ pc & (p \gg mc; \text{ER}) \end{cases}$$

$$p = \gamma m v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} m v$$

Verteilungsfunktion von Fermionen und Bosonen

- Alle Teilchen: Bose-Einstein oder Fermi-Dirac Statistik; bei kleinen T ist die Art der Teilchen wichtig wenn man ihr thermodynamisches Verhalten bestimmen will; bei hohen T verhalten sich alle ideale Gase freier Teilchen wie das klassische ideale Gas.
- Aus der großkanonischen Zustandssumme => **Energieverteilungsfunktionen für Fermionen und Bosonen im thermodynamischen Gleichgewicht:**

$$dN = \frac{dg}{e^{-\eta + E/kT} \pm 1}$$

E = Energie des Teilchens

dN = Anzahl der Teilchen p im Energieintervall $(E, E+dE)$

dg = Anzahl der Quantenzustände im Energieintervall $(E, E+dE)$

$dg = \alpha d^3x d^3p / h^3$ (α wegen Teilchenspin)

+1 = Fermionen, Pauli-Prinzip, nur ein Teilchen pro Phasenraumzelle h^3

-1 = Bosonen, kein Pauli-Prinzip

η = Entartungsparameter = μ/kT , mit μ =chemisches Potential

Verteilungsfunktion von Fermionen und Bosonen

- Für alle massive Teilchen die weder erzeugt noch vernichtet werden kann η aus der Forderung der Teilchenzahlerhaltung bestimmt werden:

$$N = \int \frac{dg}{e^{-\eta + E/kT} \pm 1} = \textit{const.}$$

(gilt nicht für Photonen in einem Hohlraumstrahler da $\eta=0$)

- Abhängig von η unterscheiden wir zwischen:

$\eta \gg 1$: hoch entartete Systeme

$-5 < \eta < 5$: medium bis schwach entartete Systeme

$\eta \ll -1$: nicht entartete Systeme

(Erklärung siehe folgende slides)

Impulsverteilung von nicht-entarteten, freien Teilchen

- Falls $\eta \ll -1 \Rightarrow e^{-\eta+E/kT} \gg 1$ und: $dN \propto e^\eta e^{-E/kT}$

- Mit der kinetische Energie des freien Teilchens:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}$$

- und der Anzahl der Quantenzustände zwischen (E, E+dE):

$$dg = \alpha \frac{d^3 x d^3 p}{h^3}$$

- folgt:

$$dN = \alpha \frac{d^3 x d^3 p}{h^3} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} e^\eta$$

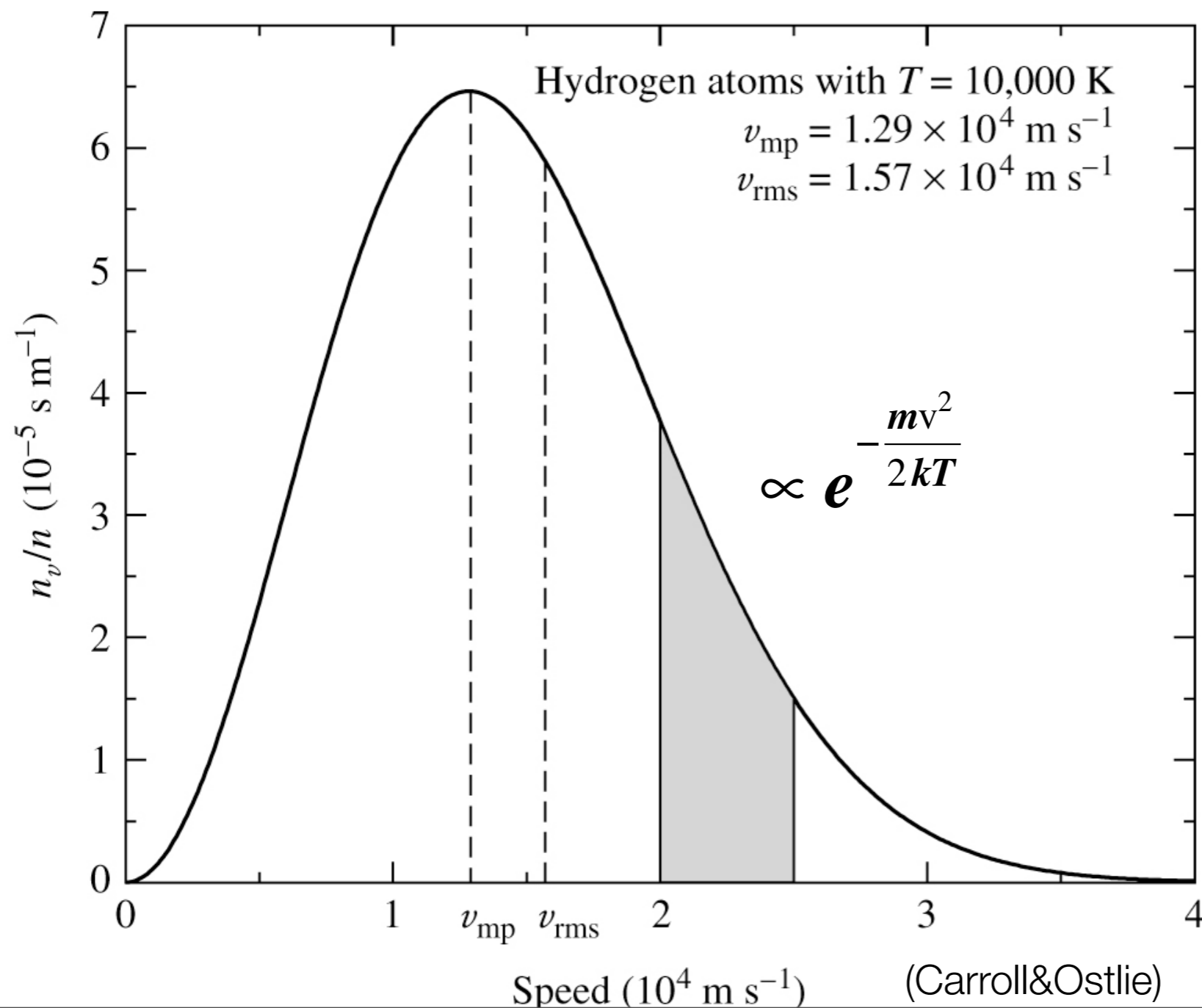
Integration \Rightarrow
$$N = \frac{\alpha}{h^3} e^\eta V (2\pi mkT)^{3/2}$$

Eliminiere e^η in $dN \Rightarrow$
$$dN = \frac{N}{V} \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} d^3 p dV$$

\Rightarrow **Maxwell-Boltzmann Verteilung**

Die Maxwell-Boltzmann Verteilung

- wir erhielten die Energieverteilungsfunktion von nicht-entarteten, freien Teilchen im thermodynamischen Gleichgewicht



Beispiel:

Geschwindigkeitsverteilung von H-Atome bei $T=10^4\text{K}$

Fläche zwischen 2 v's:

Bruchteil der Atome (n_v/n) mit Geschwindigkeiten zwischen ($v, v+dv$)

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist

$$v_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Wann ist ein freies Teilchengas entartet?

- Wir definieren die **de Broglie Wellenlänge** eines Teilchens im thermodynamischen Plasma:

$$\lambda_{deBroglie} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

- und der **mittlere Teilchenabstand r_0** : $\frac{1}{r_0^3} = \frac{N}{V} = n$

- Wir hatten gerade gezeigt dass für $\eta \ll -1 \Rightarrow e^\eta = \frac{n}{\alpha} \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}$ oder:

$$\eta = \ln \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda_{deBroglie}^3}{r_0^3} \right)$$

- Damit erhalten wir dass:

- $\eta \ll -1 \Rightarrow$ **grosser Abstand zwischen den Teilchen, Quanteneffekte sind nicht relevant, wir können diese als klassisch betrachten**

Wann ist ein freies Teilchengas entartet?

- Entartete Systeme in der Astrophysik sind i.A. fermionisch. Da das Pauli-Prinzip gilt, haben wir maximal ein Teilchen pro Phasenraumzelle (die maximale Phasenraumdicke ist \propto/h^3).
- Für Fermionen gilt die Energieverteilungsfunktion ($\epsilon=p^2/2m$) mit $\eta=\mu/kT$:

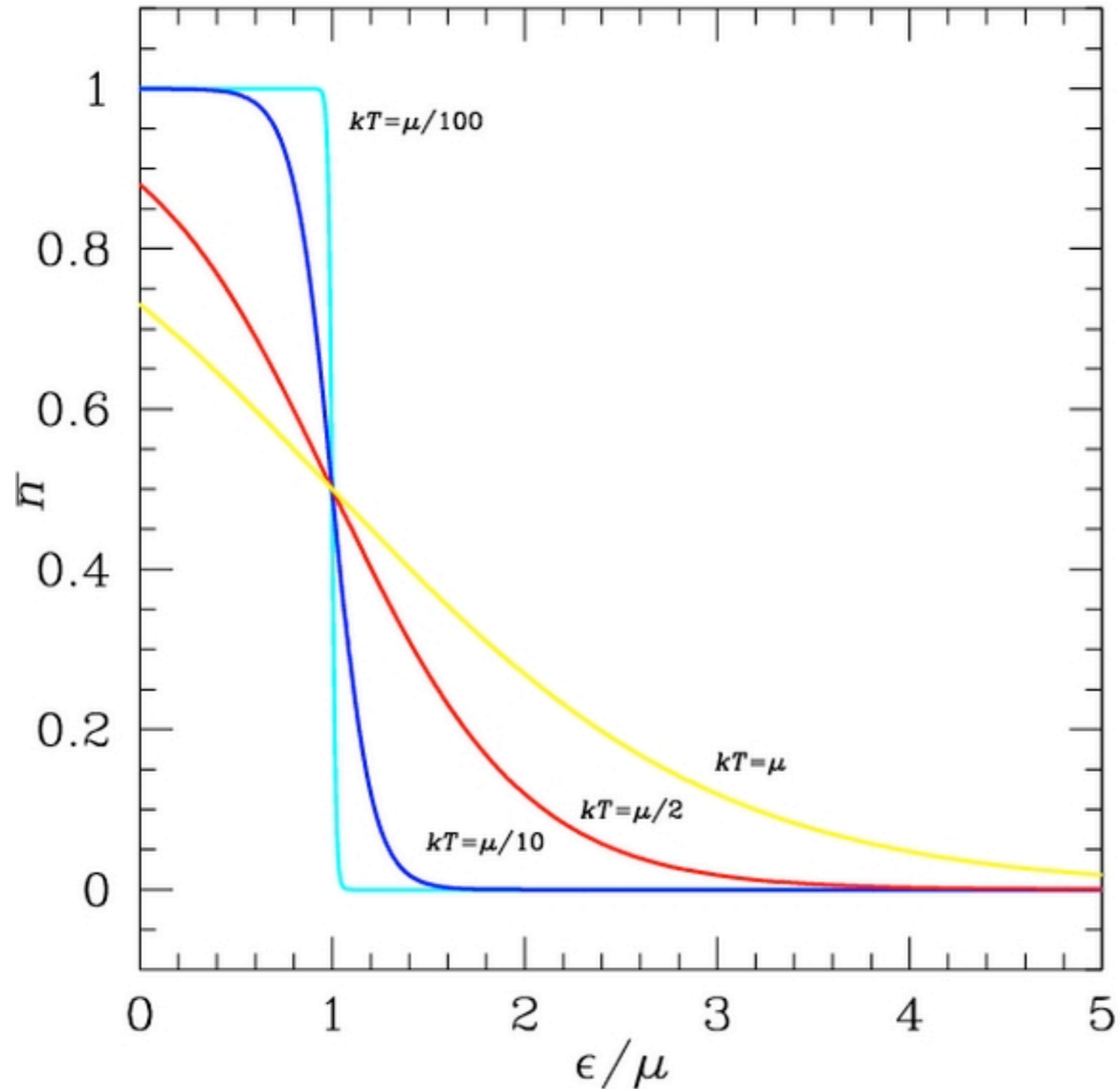
$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{-\eta+\epsilon/kT} + 1} = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1}$$

- **Komplette Entartung:** falls das System auf T gekühlt wird, die viel kleiner als das chemische Potential μ sind, dh $\eta \gg 0$

$$kT \ll \mu \quad (\eta \gg 0): \quad f(\epsilon) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } \epsilon < \mu \\ 0 & \text{falls } \epsilon > \mu \end{cases}$$

- $\mu = \epsilon_F$ Fermi-Energie, $p_F =$ Fermi-Impuls.
- Die Fermi-Energie ist die Energie des energiereichsten Elektrons im System.

Fermi-Dirac Verteilung



Kleine Temperaturen:

Stufenfunktion:
alle Zustände unterhalb der
Fermienergie besetzt

Grössere Temperaturen:

Zustände oberhalb der
Fermienergie werden
erreichbar

Wann ist ein freies Teilchengas entartet?

- Wir bestimmen η aus der Forderung dass das Integral über die Besetzungszahlen N ist:

$$N = \frac{\alpha}{h^3} \int \int \frac{1}{e^{-\eta + p^2 / 2mkT} + 1} d^3 p d^3 x$$

- Falls die Verteilung der Impulse isotropisch und die Teilchenverteilung homogen ist, erhalten wir:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\alpha}{h^3} \int \int \frac{1}{e^{-\eta + p^2 / 2mkT} + 1} 4\pi p^2 dp$$

- Wir ersetzen $x = \frac{p^2}{2mkT}$ und erhalten:

$$n = \frac{\alpha}{h^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\pi mkT)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{e^{-\eta + x} + 1}$$

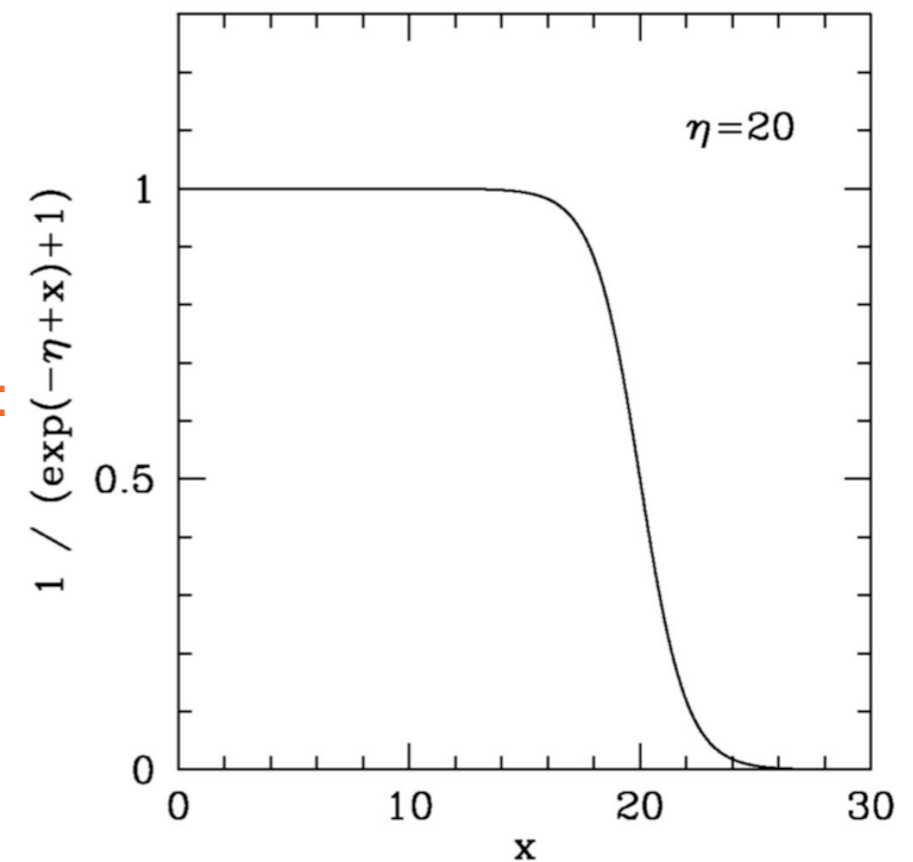
Wann ist ein freies Teilchengas entartet?

- bei **starker Entartung** $\eta \gg 1$ kann $\frac{1}{e^{-\eta+x} + 1}$ als Stufenfunktion approximiert werden und das Integral vereinfacht sich zu:

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{e^{-\eta+x} + 1} = \int_0^{\eta} x^{1/2} dx = \frac{2}{3} \eta^{3/2}$$

- Auflösen nach η und Einsetzen von $\lambda_{deBroglie}$ und r_0 ergibt:

$$\eta = \frac{1.21}{\alpha^{2/3}} \left(\frac{\lambda_{deBroglie}}{r_0} \right)^2$$



Wann ist ein freies Teilchengas entartet?

- **damit ist $\eta \gg 1$ falls $r_0 \ll \lambda_{deBroglie}$** => wir können die Quanteneigenschaften der Teilchen nicht mehr vernachlässigen falls ihr Abstand kleiner als die typische de Broglie Wellenlänge ist.
- Wir können den Fermi-Impuls p_F aus dem vollständig entarteten Fall berechnen:

$$n = \frac{\alpha}{h^3} \int_0^{p_F} n(p) 4\pi p^2 dp = \frac{\alpha}{h^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

$$p_F = h \left(\frac{3}{\alpha 4\pi} \right)^{1/3} n^{1/3}$$

- **der Fermi-Impuls ist der höchste Teilchenimpuls im Falle unendlicher Entartung**

- **Zusammenfassung:** $\left(\frac{\lambda_{deBroglie}}{r_0} \right)$ bestimmt den Entartungsgrad:

$$\frac{\lambda_{deBroglie}}{r_0} \begin{cases} \gg 1 & \text{Fermigas} \\ \ll 1 & \text{Maxwell-Boltzmannngas} \end{cases}$$

Astrophysikalische Beispiele für entartete Fermionen

- **Sonne, weisser Zwerg, Neutronenstern** ($M \sim M_\odot$). Die mittleren Dichten und Temperaturen sind

$$\bar{n} = \frac{1}{m_p} \frac{M_\odot}{\frac{4\pi}{3} R_\odot^3}, \quad \bar{T} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ K}$$

- und das Verhältnis $\frac{\lambda_{deBroglie}}{r_0}$ ist:

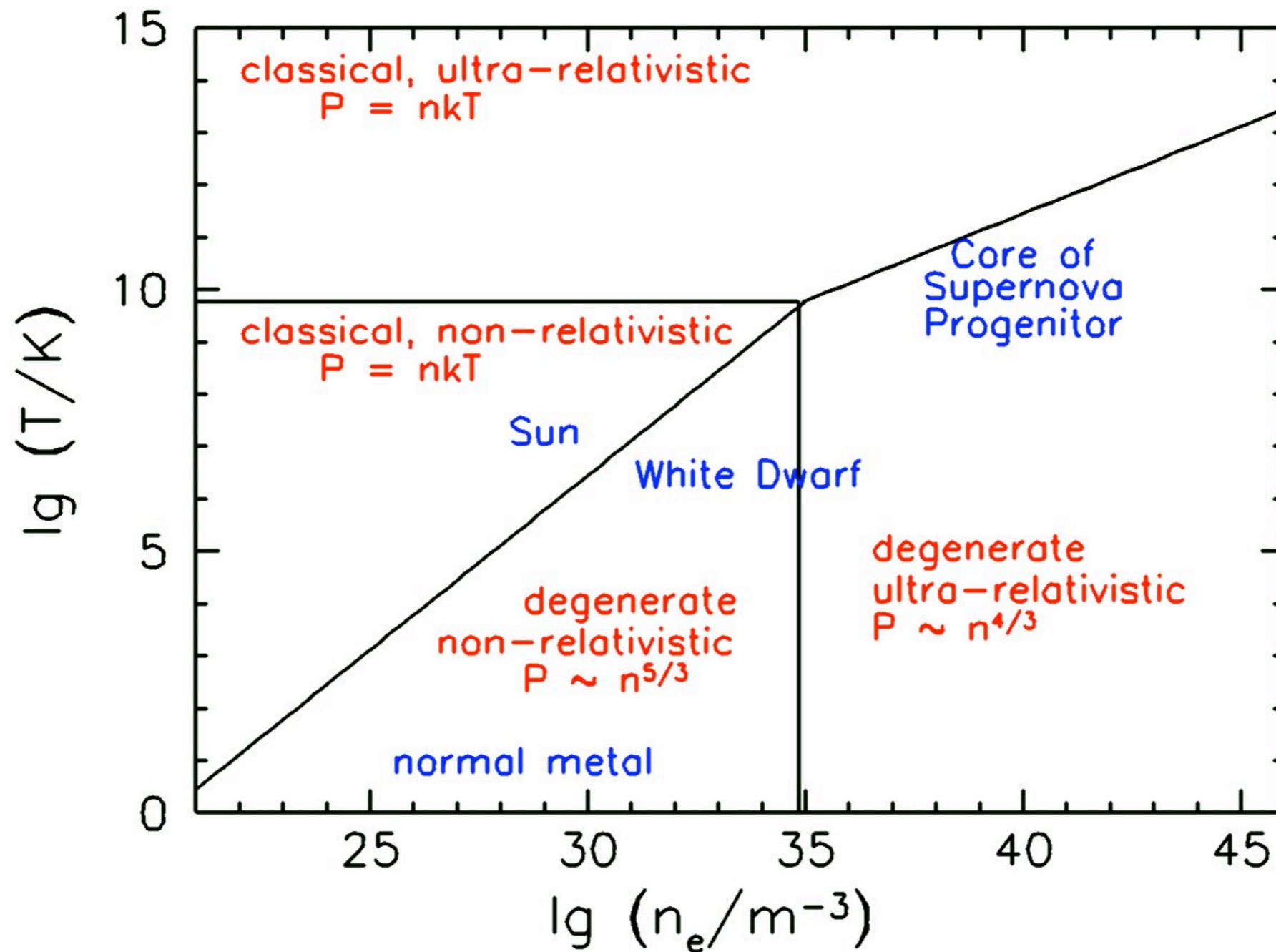
	R	n [cm ⁻³]	$\lambda_{deBroglie}/r_0$ (e-)	$\lambda_{deBroglie}/r_0$ (p/n)
Sonne	$7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$	$8 \cdot 10^{23}$	0.15	$3.7 \cdot 10^{-3}$
Weisser Zwerg	$10^{-2} R_\odot$	$8 \cdot 10^{29}$	15	0.37
Neutronenstern	$1.4 \cdot 10^{-5} R_\odot$	$3 \cdot 10^{38}$	---	27

- Sonne: ideales Gas, Maxwell-Boltzmann

- Weisser Zwerg:
Elektronen entartet,
Protonen MB

- Neutronenstern: Neutronen entartet

Beispiel: Temperatur-Dichte Diagramm

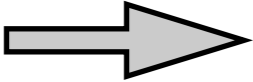


Die Planck-Verteilungsfunktion für Photonen

- Photonen sind Bosonen. Da ihre Teilchenzahl im thermodynamischen Gleichgewicht nicht erhalten ist, haben wir $\eta=0$ und somit ist die Verteilungsfunktion

$$dN = \frac{dg}{e^{E/kT} - 1}$$

- Im TE ist die Verteilung der Impulse isotropisch; die Photonen haben 2 Polarisationsrichtungen:


$$dg = 2V \frac{d^3 p}{h^3} = \frac{2V}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

- Energie, Impuls und Frequenz der Photonen hängen zusammen über:

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h\nu}{c}, \quad dp = \frac{h}{c} d\nu$$

- Durch Einsetzen erhalten wir die **Anzahldichte der Photonen im Frequenzintervall $(\nu, \nu+d\nu)$:**

$$dn = \frac{dN}{V} = \frac{4\pi}{c} \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Die Planck-Funktion für Photonen

- Um auf die Energiedichte im Frequenzintervall $(\nu, \nu+d\nu)$ zu kommen, multiplizieren wir mit $h\nu$:

$$U_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- Wir definieren die Intensität $B_\nu(T)$ als die Energie, die durch eine Einheitsfläche pro Sekunde und Raumwinkel fließt. Die Beziehung zwischen Intensität und Energiedichte ist:

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} B_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} B_\nu$$

- Somit erhalten wir die Planck-Funktion $B_\nu(T)$, die Photonen im thermodynamischen Gleichgewicht beschreibt (Hohlraumstrahlung):

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

=> Die Frequenzverteilung der Strahlung eines Systems im TE ist

isotrop, homogen, unabhängig von der chemischen Zusammensetzung des emittierenden Materials, abhängig nur von der Temperatur

Zustandsgleichungen

- Für das Maxwell-Boltzmann Gas gilt:

$$n(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2m k T}}$$

- mit $\mathbf{p}v = \mathbf{p}^2 / m$, $\varepsilon = \mathbf{p}^2 / 2m$ und der Druckgleichung aus der kinetischen Theorie erhalten wir für den Druck:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \mathbf{p} v(\mathbf{p}) n(\mathbf{p}) 4\pi \mathbf{p}^2 d\mathbf{p} = nkT$$

- und für die kinetische Energie:

$$U_{kin} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\mathbf{p}) n(\mathbf{p}) 4\pi \mathbf{p}^2 d\mathbf{p} = \frac{3}{2} nkT = \frac{3}{2} P$$

Zusammenfassung: Zustandsgleichungen

- **Normale Sterne:** $P = nkT$, $\rho = \mu m_p n$, $U_{kin} = \frac{3}{2}P$, mit μ definiert als $\mu = \rho / (m_p n)$

- **Weisse Sterne:** entartetes Elektronengas liefert den Druck:

$$n = n_e, \quad \rho = \mu_e m_p n_e, \quad \mu_e = z\mu, \quad \text{wobei } z = \text{Anzahl der freien Elektronen/Atom}$$

nicht-relativistische Entartung ($\rho < 10^6 \text{ gcm}^{-3}$): $P = A\rho^{5/3}$, $U_{kin} = \frac{3}{2}P$

relativistische Entartung ($\rho > 10^6 \text{ gcm}^{-3}$): $P = B(\rho^{4/3} - C\rho^{2/3})$, $P = \frac{1}{3} U_{kin} (1 + D\rho^{-1/3})$

- **Neutronensterne:** entartete Neutronen liefern den Druck: $n = n_n$, $\rho = m_n n$, ansonsten wie beim weissen Zwerg nur unterschiedliche Koeffizienten A, B, C, D und kritische Dichte

- **Photonen:** Bosonen, daher gilt

$$n(p) = \frac{1}{h^3} \frac{1}{e^{hv/kT} - 1}$$

$$U_{phot} = \frac{4\pi}{c} \int B_\nu(T) d\nu \propto T^4$$

$$P_{phot} = \frac{1}{3} U_{phot}$$

-
- Der Energieaustausch zwischen dem elektromagnetischen Strahlungsfeld und stellarer Materie erfolgt durch Änderung der Energie freier und gebundener Elektronen, verbunden mit Absorption und Emission von Photonen

- **Fragen:**

welche Übergänge sind möglich?

was ist das Verhältnis der Anzahl N der Atome (oder Ionen) in einem bestimmten Energiezustand?

wie erklären wir die Spektrallinien?

- Boltzmann-Gleichung
- Saha-Gleichung
- Atomare/molekulare Übergänge

Boltzmann-Gleichung

- Betrachte freie, nicht-entartete Atome mit einem angeregten Elektron. Die Energie des Atoms A ist die Summe aus kinetischer plus Anregungsenergie E_i :

$$E = \frac{p_A^2}{2m_A} + E_i$$

- Die Anzahl der Quantenzustände im Intervall $(E, E+dE)$ ist (wobei g_i =die Entartung des angeregten Zustandes, "statistisches Gewicht" oder Anzahl der Einzelzustände, die zur Energie E_i beitragen):

$$dg_A = \frac{d^3x d^3p_A}{h^3} g_i$$

- Integration über die Verteilungsfunktion liefert:

$$N_i = \int dN_i = \frac{g_i}{h^3} e^{\eta_A} e^{-E_i/kT} \int \int e^{-p_A^2/(2m_A kT)} d^3x d^3p_A = V \frac{(2\pi m_A kT)^{3/2}}{h^3} e^{\eta_A} e^{-E_i/kT}$$

- oder (wobei n_i = Anzahldichte der Atome mit einem Elektron im Quantenzustand i):

$$n_i = \frac{N_i}{V} = \frac{(2\pi m_A kT)^{3/2}}{h^3} e^{\eta_A} e^{-E_i/kT}$$

Boltzmann-Gleichung

- Daraus folgt das Verhältnis der Anzahldichten der Atome in zwei unterschiedlichen Energiezuständen E_i und E_j :

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{kT}\right)$$

← Boltzmann-Faktor

Boltzmann-Gleichung für das Verhältnis der Besetzungszahlen

- **Beispiel: Wasserstoffatom** -> Entartung der Energiezustände ist $2n^2$ (n =Hauptquantenzahl)

Grundzustand: $E = -13.6$ eV, $n=1$, $g_1=2$

1. Angeregter Zustand: $E = -3.4$ eV, $n=2$, $g_2 = 8$

2. Angeregter Zustand: $E = -1.5$ eV, $n=3$, $g_3 = 18$

- Sei Gas aus neutralem Wasserstoff; bei welcher T sind gleich viele Atome im Grundzustand und im ersten angeregten Zustand?

Boltzmann-Gleichung

- Wir setzen $n_1 = n_2$ in der Boltzmann-Gleichung und erhalten:

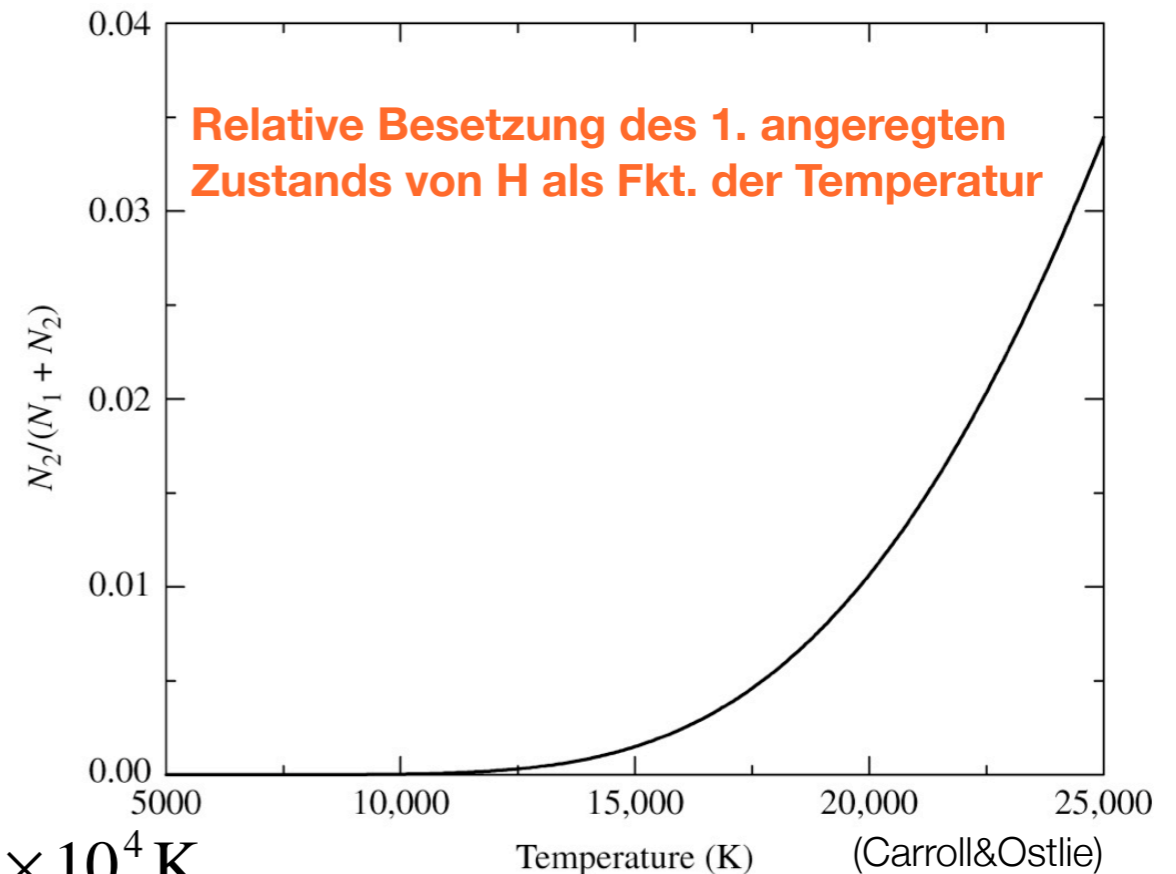
$$1 = \frac{2(2)^2}{2(1)^2} e^{-[(-13.6\text{eV}/2^2) - (-13.6\text{eV}/1^2)]/kT}$$

$$1 = \frac{8}{2} e^{-10.2\text{eV}/kT}$$

$$\frac{10.2\text{eV}}{kT} = \ln(4)$$

mit $k = 8.6174 \times 10^{-5} \text{eV K}^{-1}$

$$\Rightarrow T = \frac{10.2\text{eV}}{k \ln(4)} = \frac{10.2\text{eV}}{8.62 \times 10^{-5} \text{eV K}^{-1} \ln(4)} = 8.54 \times 10^4 \text{ K}$$



=> es werden hohe Temperaturen benötigt, um viele H-Atome in den ersten angeregten Zustand zu bringen!

=> jedoch erreichen zB die Balmer-Linien (von $n=2$ nach $n=3,4,\dots$) ihr Maximum bei etwa 9520K und werden sogar schwächer in heißeren Sternen; **warum?**

Boltzmann-Gleichung

- Um die Anzahldichte $n_{A,i}$ eines Atoms (oder Ions) A im Quantenzustand i relativ zu der Anzahldichte aller Atome (oder Ionen) zu erhalten, müssen wir die Summe über alle Quantenzustände berechnen (= die Partitionsfunktion Z):

$$Z_A(T) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{A,i} \exp\left(-\frac{E_{A,i}}{kT}\right)$$

- dann folgt:

$$\frac{n_{A,i}}{n_A} = \frac{g_{A,i}}{Z_A(T)} \exp\left(-\frac{E_{A,i}}{kT}\right)$$

Partitionsfunktion:

die gewichtete Summe der Arten, in der ein Atom bei einer gegebenen Temperatur seine Elektronen arrangieren kann

Die energiereicheren Konfigurationen werden dabei durch den Boltzmann-Faktor heruntergewichtet

Die Saha-Gleichung

- wir behandeln den einfachen Fall der Ionisation (gebunden-frei Übergang):

Atom im Grundzustand + Photon => Ionisiertes Atom im Grundzustand + freies Elektron

- Mit ($m_A \approx m_I$):
$$E_A = \frac{p_A^2}{2m_A} = \text{Energie des Atoms}$$
$$E_I = \frac{p_I^2}{2m_A} + E_{ion} = \text{kinetische Energie plus Ionisationsenergies des Ions}$$
$$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \text{kinetische Energie des Elektrons}$$

- ist die Anzahl der Zustände:

$$dg_A = \frac{d^3x d^3p_A}{h^3} g_A \quad dg_I = \frac{d^3x d^3p_I}{h^3} g_I \quad dg_e = \frac{d^3x d^3p_e}{h^3} g_e$$

- wir integrieren über die Verteilungsfunktionen um die Anzahldichten der Teilchen zu erhalten:

Die Saha-Gleichung

- mit $g_e = 2$ (2 Spinzustände des Elektrons):

$$n_A = \frac{N_A}{V} = g_A \frac{(2\pi m_A kT)^{3/2}}{h^3} e^{\eta_A}$$

$$n_I = \frac{N_I}{V} = g_I \frac{(2\pi m_A kT)^{3/2}}{h^3} e^{\eta_I} e^{-E_{ion}/kT}$$

$$n_e = \frac{N_e}{V} = 2 \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{\eta_e}$$

- Da die Energie konserviert ist, müssen die chemischen Potentiale die Beziehung erfüllen:

$$\eta_I + \eta_e - \eta_A = 0$$

- Aus dem Produkt $n_I n_e / n_A$ folgt die **Saha-Gleichung**:

$$\frac{n_I n_e}{n_A} = \frac{2 g_I}{g_A} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-E_{ion}/kT}$$

- geht zurück auf den indischen Astrophysiker Meghnad Saha, 1920

Die Saha-Gleichung

$$\frac{n_I}{n_A} = \frac{2g_I}{n_e g_A} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-E_{ion}/kT}$$

=> das Verhältnis der Anzahl von ionisierten Atomen zu den Atomen im Grundzustand

- abhängig von $1/n_e$: je mehr freie Elektronen da sind, umso leichter können Ionen wieder rekombinieren, umso weniger Atome sind im ionisierten Zustand

- **Beispiel: Sternatmosphäre aus Wasserstoff**

=> $n_I/n_{\text{Tot}} = n_I/(n_I+n_A) = (n_I/n_A)/(1+n_I/n_A)$

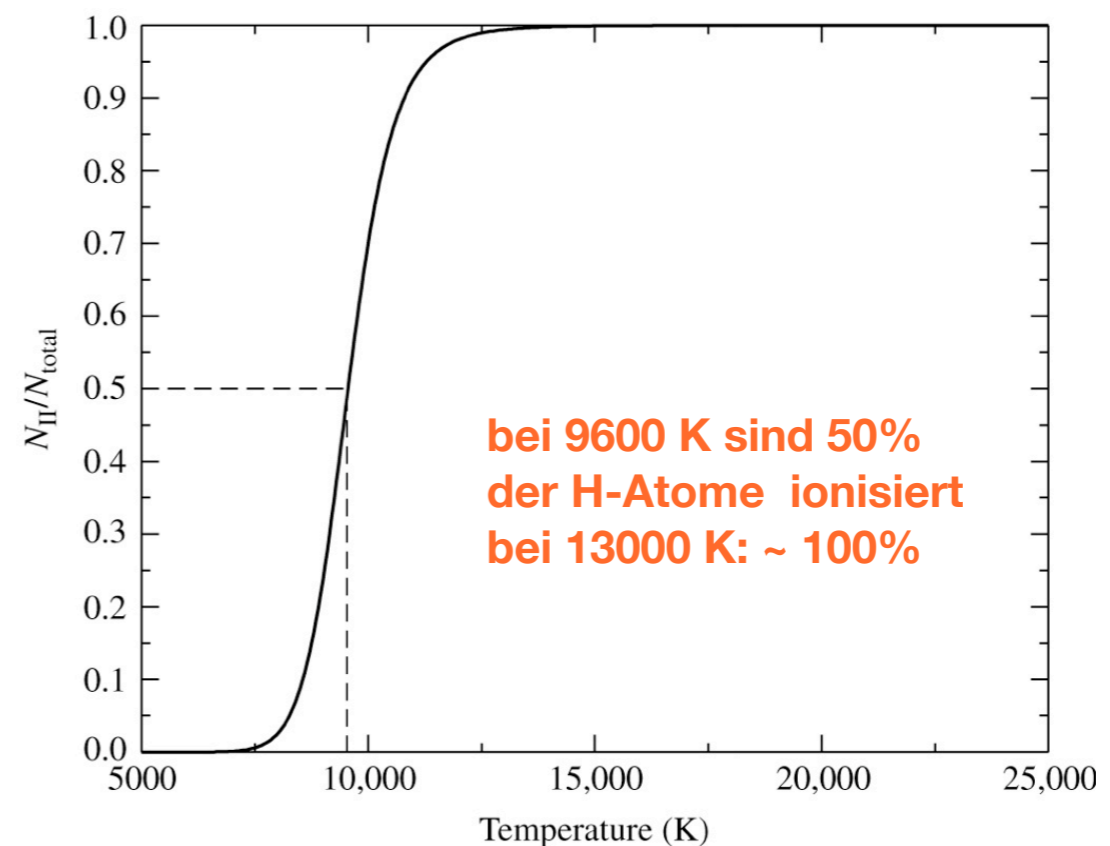
Bruchteil der ionisierten Atome zwischen

5000 K und 25000 K

=> Ionisation läuft in einem kleinen T-Bereich

von etwa 3000K um $T \sim 10000\text{K}$ herum ab

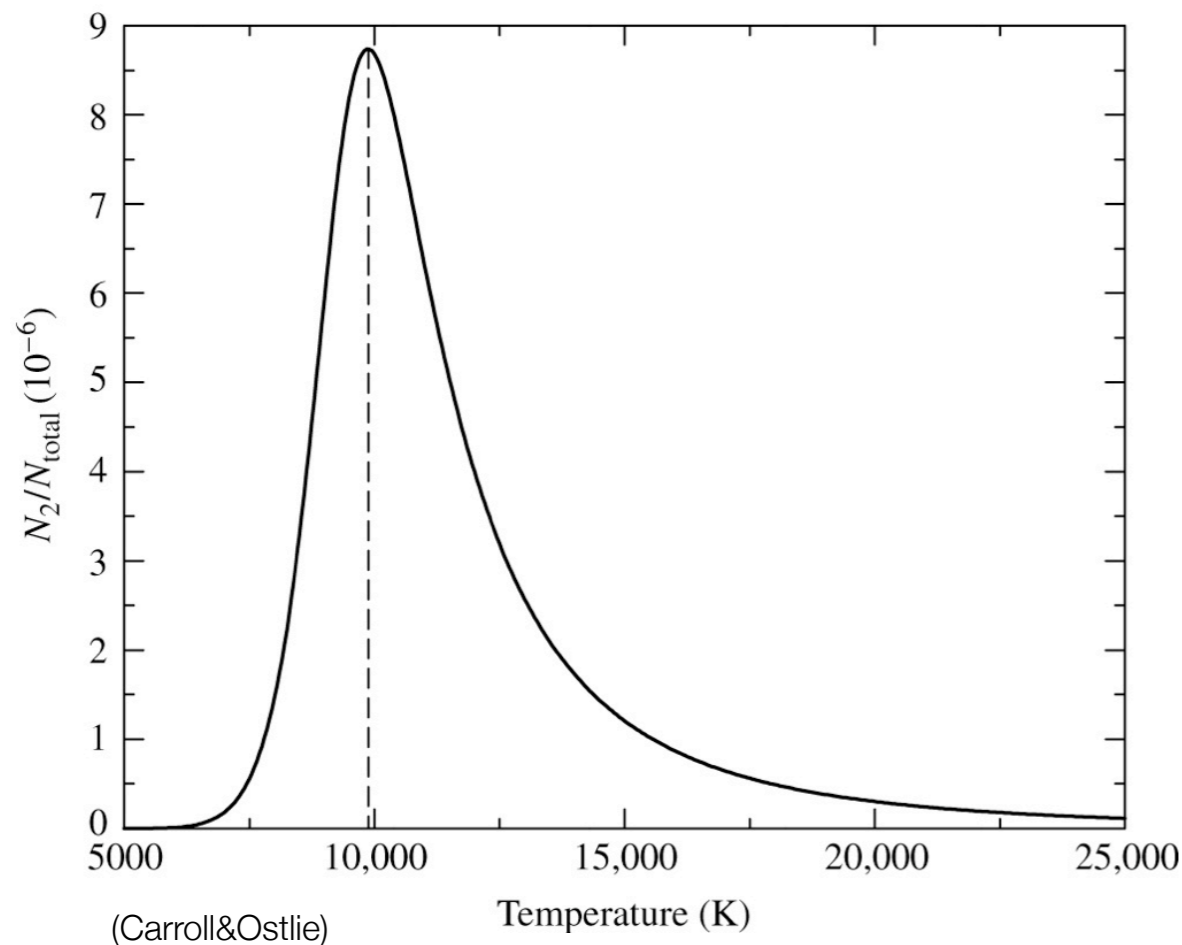
=> Zone partieller Ionisation



(Carroll&Ostlie)

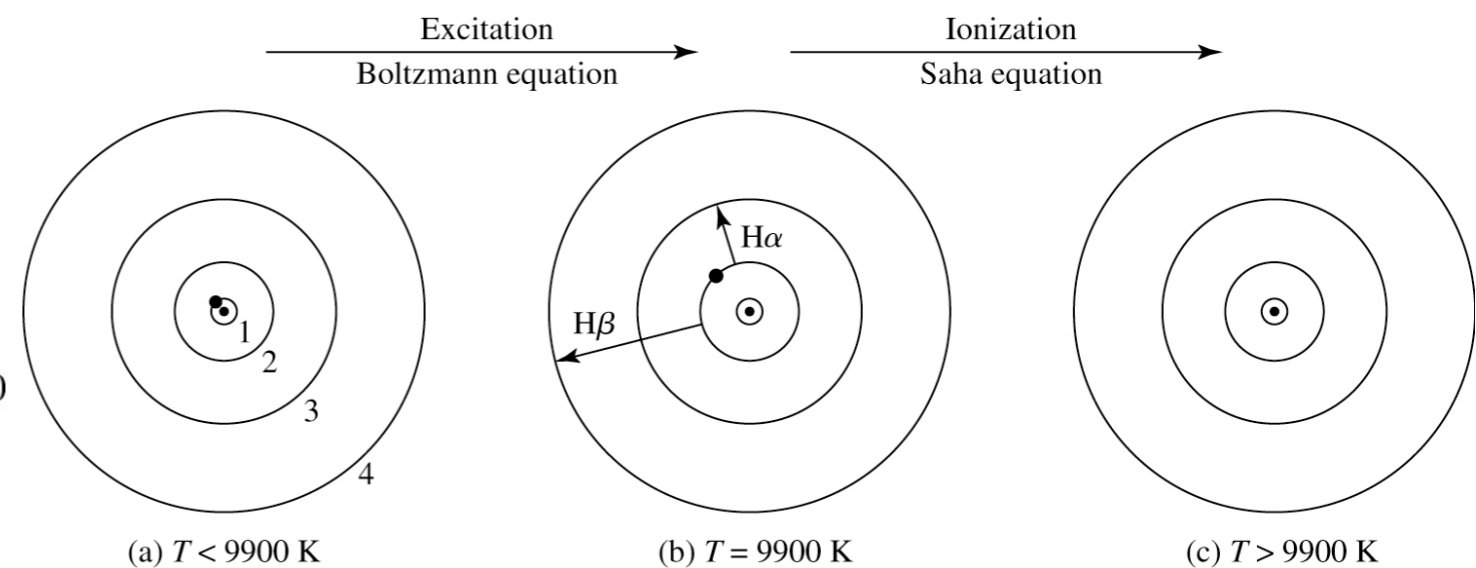
Boltzmann + Saha-Gleichung

- Die Stärke der Balmer-Linien hängt von dem Verhältnis n_2/n_{Tot} ab = Anteil **aller** H-Atome, die im 1. angeregten ($n=2$) Zustand sind.
- Aus der Kombination der Saha und Boltzmann-Gleichungen folgt das Verhältnis von Atomen im 1. angeregten Zustand zu allen Atomen



Ergebnis: deutlicher Peak bei 9900 K, in guter Übereinstimmung mit Beobachtungen!

Abnehmende Stärke der Balmer-Linien bei $T_{\text{eff}} > 10000$ K kommt durch schnelle Ionisation des Wasserstoffs bei hohen Temperaturen zustande



e^- im Grundzustand

Max. der Balmer-Linie

H ionisiert

Atomare und molekulare Übergänge

- Emission und Absorption von Photonen finden durch Prozesse in Atome/Moleküle. Diese Prozesse sind quantenmechanischer Natur. Wir erhalten ein:

diskretes Spektrum von Energie-Eigenwerten für gebundene Elektronen ($E < 0$)

kontinuierliches Energiespektrum für freie Elektronen ($E > 0$)

- Folgende Wechselwirkungen zwischen Photonen und Elektronen sind möglich:

Absorption

Spontane Emission

Stimulierte Emission

- wobei Übergänge zwischen folgenden Energieniveaus stattfinden können:

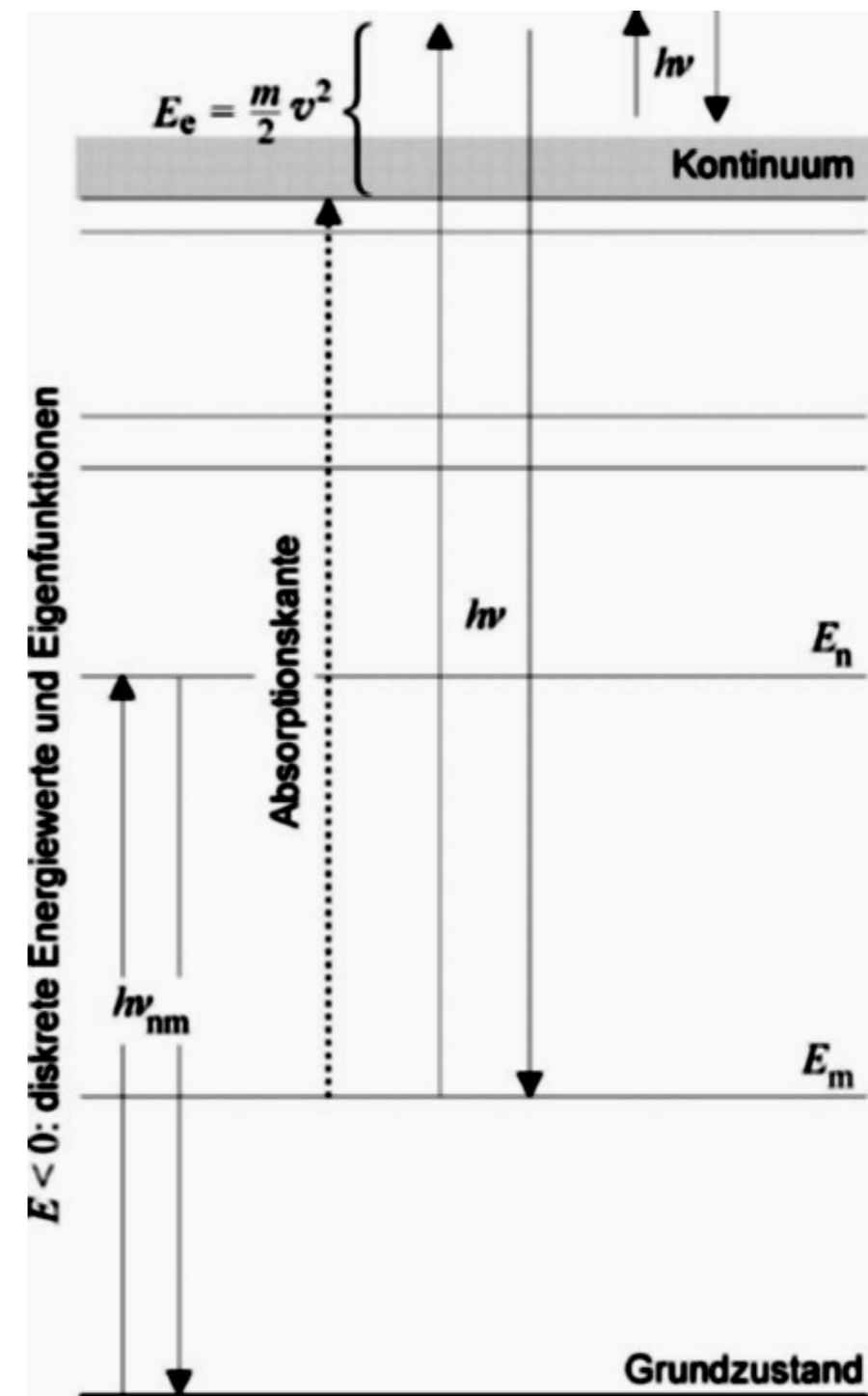
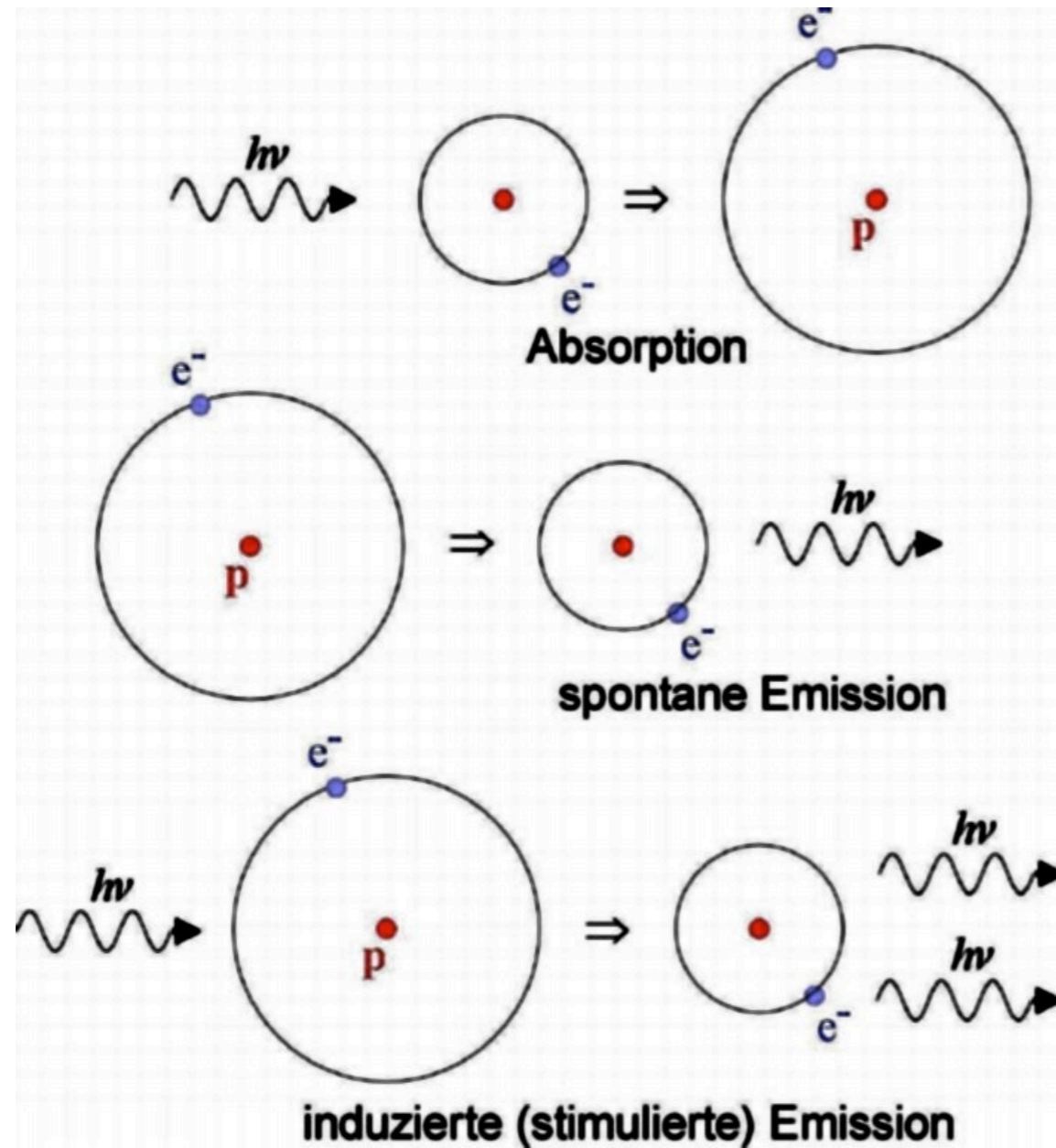
diskret-diskret (gebunden-gebunden) => Spektrallinien $h\nu = |E_i - E_j|$

diskret-kontinuierlich (gebunden-frei) => Ionisation $\frac{m_e v^2}{2} = h\nu - |E_i|$

=> Rekombination $h\nu = \frac{m_e v^2}{2} + |E_i|$

kontinuierlich-kontinuierlich (frei-frei) => Bremsstrahlung (im E-Feld eines Ions) $h\nu = |E' - E''|$

Atomare und molekulare Übergänge



Eigenwerte des Wasserstoffs

- Der Zustand des Elektrons ist beschrieben durch die folgenden Quantenzahlen:

n Hauptquantenzahl $n=1, 2, 3, \dots$

l Bahndrehimpuls $l=0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\mathbf{L} = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad L_z = m_l \hbar$$

m_l z-Komponente des Bahndrehimpulses $m_l=-l, -(l-1), \dots, l-1, l$

s Spin $m_s=\pm 1/2$

$$\mathbf{S} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar, \quad S_z = m_s \hbar$$

- Energieeigenwerte (a_0 =Bohr-Radius = 0.529 Å)

$$E_n = -\frac{e^2 Z^2}{2a_0 n^2}$$

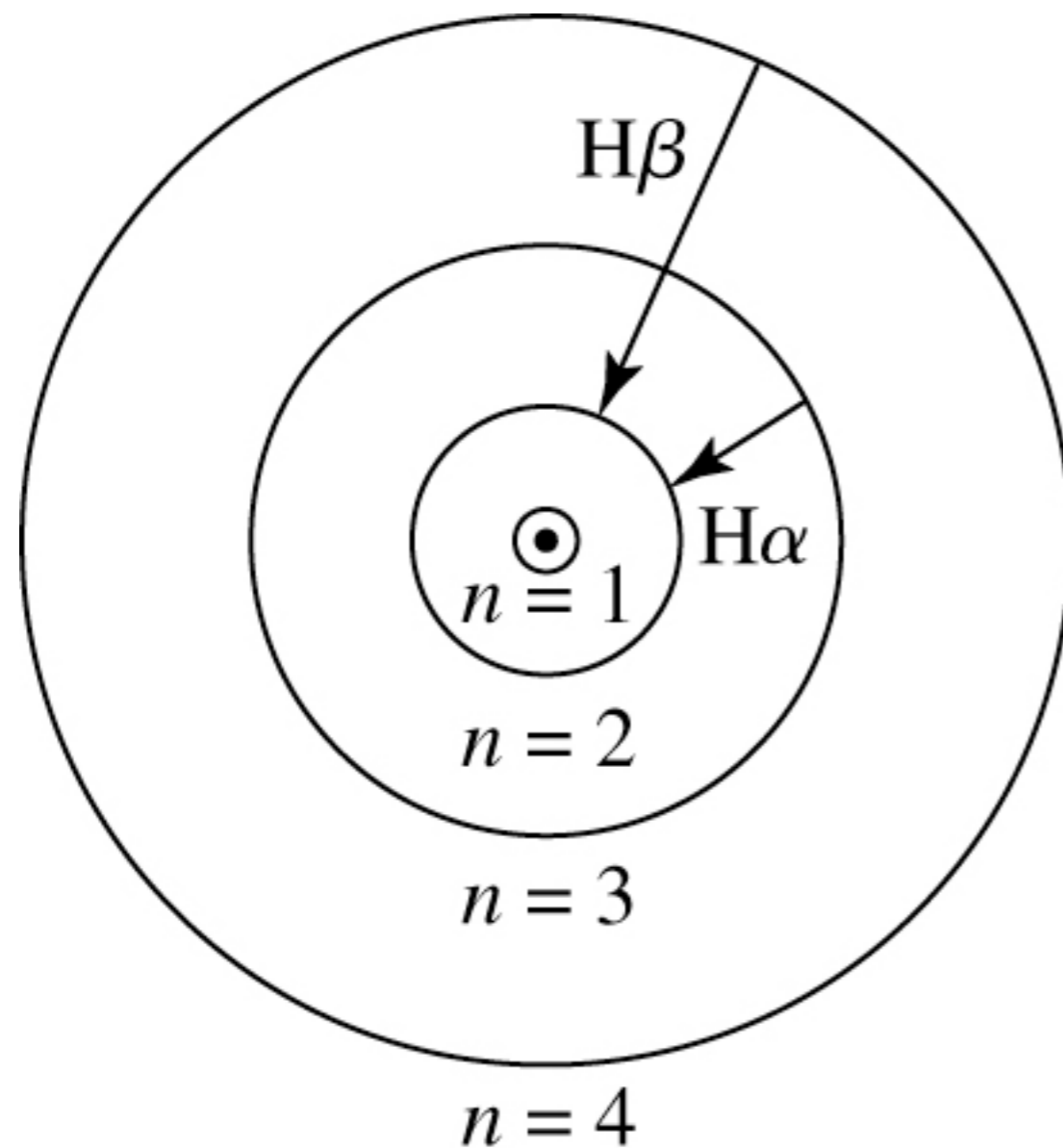
- Balmerlinien: $n=2 \rightarrow n=3, 4, 5, \dots$ (H α , H β , H γ , ...)

- Entartungsgrad pro Energieeigenwert:

$$g_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2$$

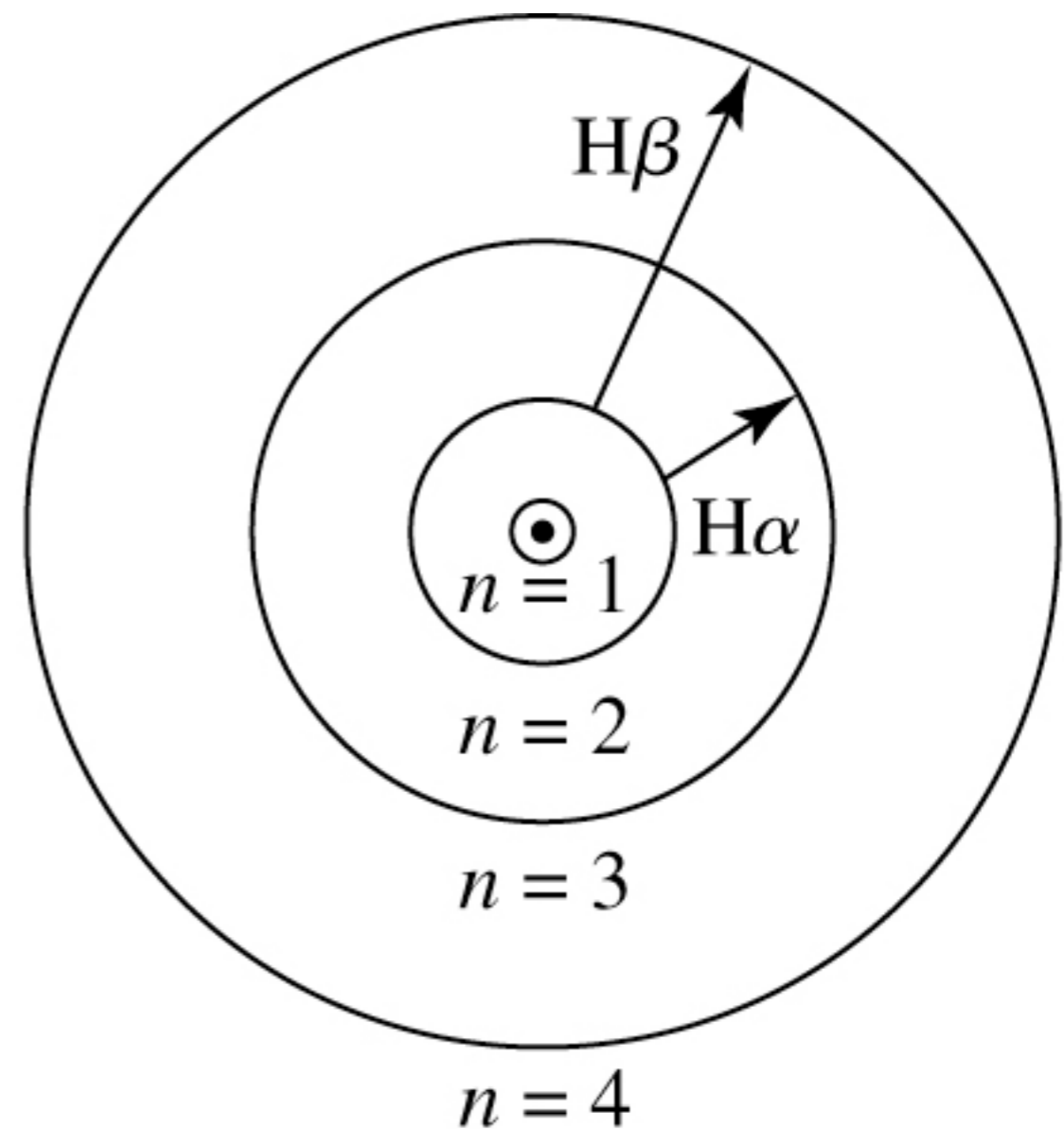
Balmer-Linien des (Bohrschen) Wasserstoffatoms

Emissionslinien



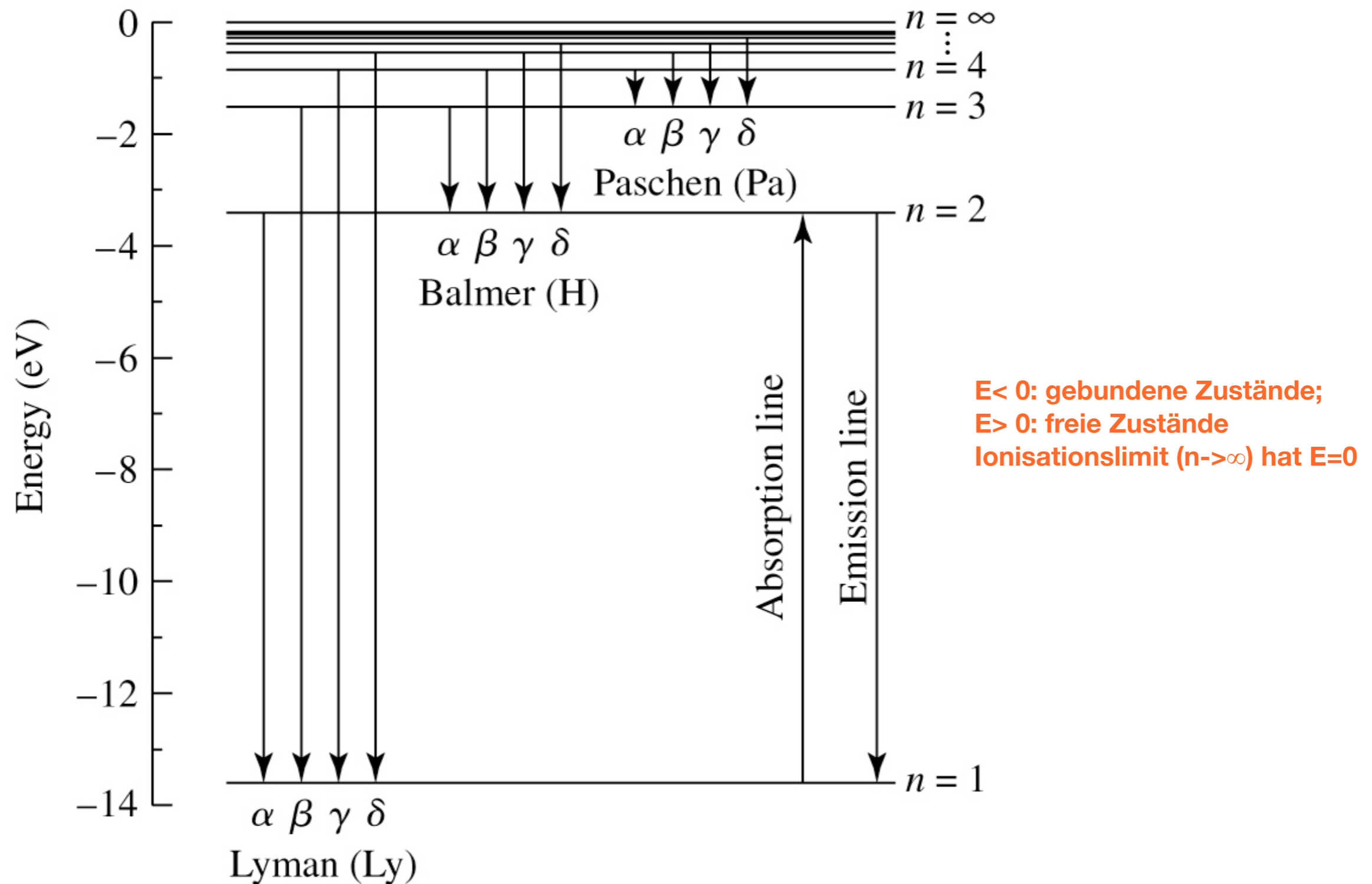
(a)

Absorptionslinien



(b)

Energieniveaus des (Bohrschen) Wasserstoffatoms



Eigenwerte von Atomen mit mehreren Elektronen

- N (Elektronen) = 1

Alkali-Metalle

$$E_n = -\frac{e^2 Z^2}{2a_0 n^2}$$

Elektrostatische Abschirmung des Kernpotentials

- N (Elektronen) > 1: die Bahndrehimpulse und Spins der Elektronen koppeln

LS-Kopplung (Spin-Bahn \ll Coulomb):

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i, \quad \vec{S} = \sum \vec{s}_i, \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad |L - S| \leq J \leq |L + S|$$

jj-Kopplung (Spin-Bahn \gg Coulomb)

$$\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i, \quad \vec{J} = \sum \vec{j}_i$$

- **Moleküleigenwerte**

molekulare Übergänge wichtig im interstellaren Medium und kühle Sterne

Übergänge durch Vibration (nahes IR) und Rotation (sub-mm, mm, radio)

$$E_{\text{el}} \gg E_{\text{vib}} \gg E_{\text{rot}}$$

Auswahlregeln

- die Übergangsmöglichkeiten bei Emission oder Absorption von elektrischer Dipolstrahlung sind beschränkt durch Auswahlregeln:

Nur Übergänge zwischen geraden und ungeraden Niveaus

J ändert sich nur um $\Delta J=0$ oder $\Delta J = \pm 1$ (der Übergang $J=0 \rightarrow J=0$ ist verboten)

- Für LS-Kopplung gilt zusätzlich:

$$\Delta L=0, \pm 1$$

$\Delta S=0$ (keine Interkombinationen, zB von Singlett-Triplett)

- Ein Übergang = **erlaubt**, falls keine Auswahlregel verletzt ist. Sind die ΔL und ΔS Auswahlregeln nicht erfüllt => **verbotene** Übergänge

Diese finden durch elektrische Quadrupolstrahlung oder magnetische Dipolstrahlung mit sehr viel kleiner Wahrscheinlichkeit statt

Streuprozesse

- **Rayleigh Streuung:** WW von **gebundenen** Elektronen mit **niederenergetischen** Photonen

Grund für den blauen Himmel! Der Wirkungsquerschnitt ist:

$$\sigma = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2} \frac{(1026\text{\AA})^4}{\lambda^4}$$

- **Thomson Streuung:** WW von **freien** Elektronen mit **niederenergetischen** Photonen

WQ:
$$\sigma = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} = 6.665 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

wichtig für IR, optische, UV-Strahlung in Sternatmosphären, interstellarem + intergalaktischem Gas, Big Bang,...

- **Compton-Streuung:** WW von **freien** Elektronen mit **hochenergetischen** Photonen

WQ:
$$\sigma = \sigma_T \frac{3 m_e c^2}{8 h\nu} \left(\ln \frac{2h\nu}{m_e c^2} + \frac{1}{2} \right)$$

wichtig für sehr heiße Gase, Röntgen- und Gammastrahlung

(bei $E_{\text{gamma}} > 2m_e c^2 (=1.02 \text{ MeV}) \Rightarrow$ **Paarerzeugung** im Coulombfeld einer Ladung)

$$\sigma \approx \alpha Z^2 \sigma_T, \quad \alpha = \frac{1}{137}$$

