Kosmologie Ia: Isotrope und homogene Weltmodelle

3. Mai 2007

Laura Baudis, lbaudis@physik.rwth-aachen.de
Physikalisches Institut Ib, RWTH Aachen

Inhalt

- Einführung
- Grundlegende Beobachtungen und Schlussfolgerungen
- Das expandierende Universum
  - kinematische Beschreibung
  - die Dynamik der Expansion
  - Modifikation durch ART
- Die Friedmann-Lemaître Expansionsgleichungen
  - Materiesorten im Kosmos
  - Diskussion der Expansionsgleichungen
  - Expansionsgleichgungen und Urknall
  - Weltalter, Rotverschiebung, lokales Hubble Gesetz
- Literatur:
- Schneider, Kapitel 4; Carroll, Ostlie, Kapitel 27.2, 29; Weigert, Wendker, Wisotzki, Kapitel 13; Unsöld, Baschek, Kapitel 13.1

Einführung

- Das Ziel der Kosmologie: die Beschreibung der Entstehung und der zeitlichen Entwicklung des Universums als Ganzem
- Bis vor ~ 100 Jahren: es war im wesentlichen eine Frage der Weltanschauung
- Schlüsselentwicklungen der modernen Physik und Astronomie, die die Kosmologie zu einer exakten Naturwissenschaft machten:

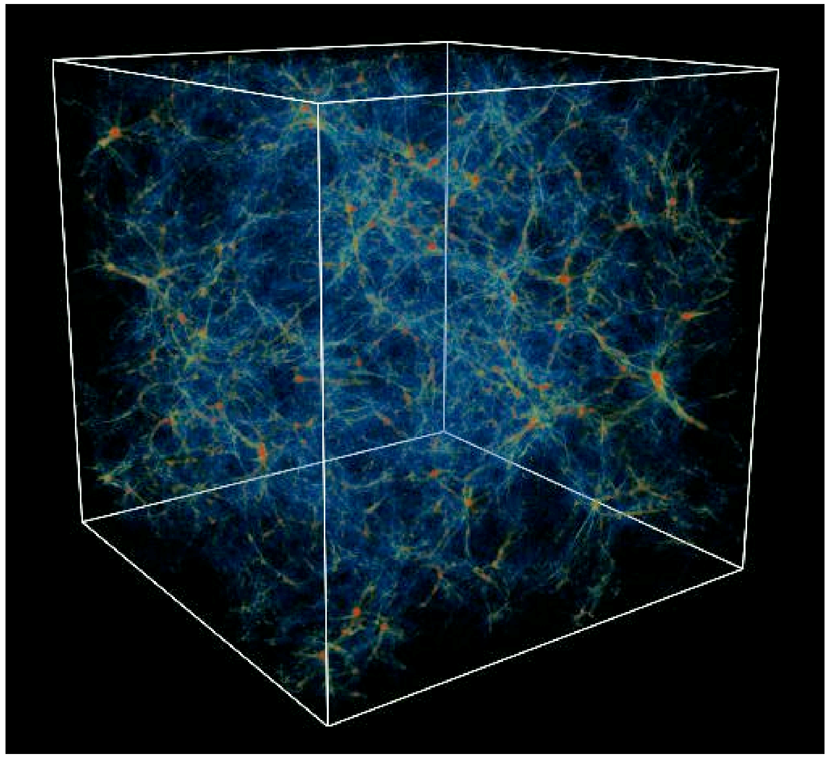
  → Die Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie

  → Die Entdeckung der Expansion des Universums

  → Weltmodelle als Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen

  → Die Entdeckung des kosmischen Mikrowellen-Hintergrundes

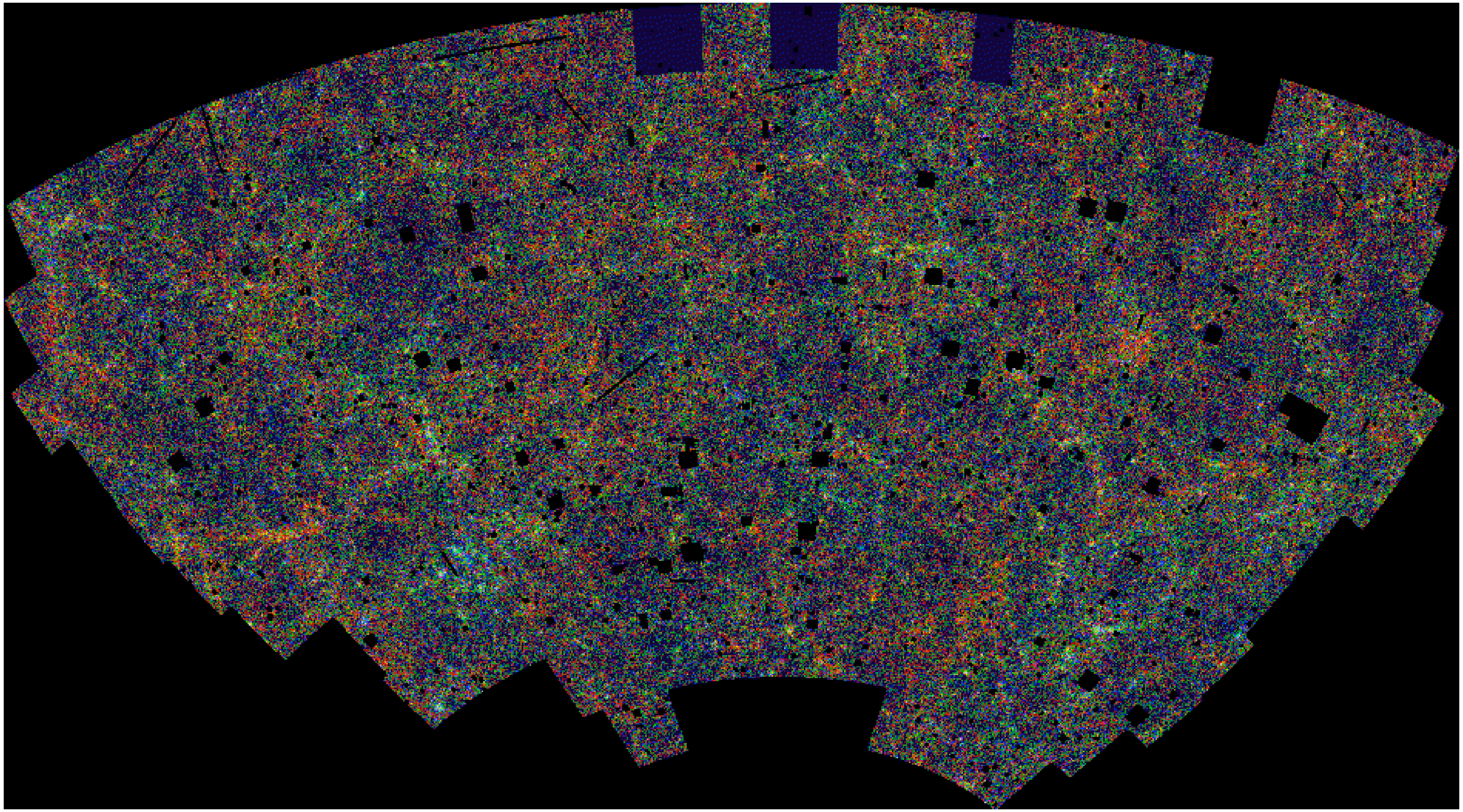
  → Die Vorhersagen der primordialen Nukleosynthese



Einführung

- Besonderheit der Kosmologie: es existiert nur ein Universum, das wir untersuchen können; keine ‘typischen’ Eigenschaften eines Universums, keine Statistik

APM-Survey: Galaxienverteilung in einem 100 × 50° Feld um den Galaktischen Südpol



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs

Einführung

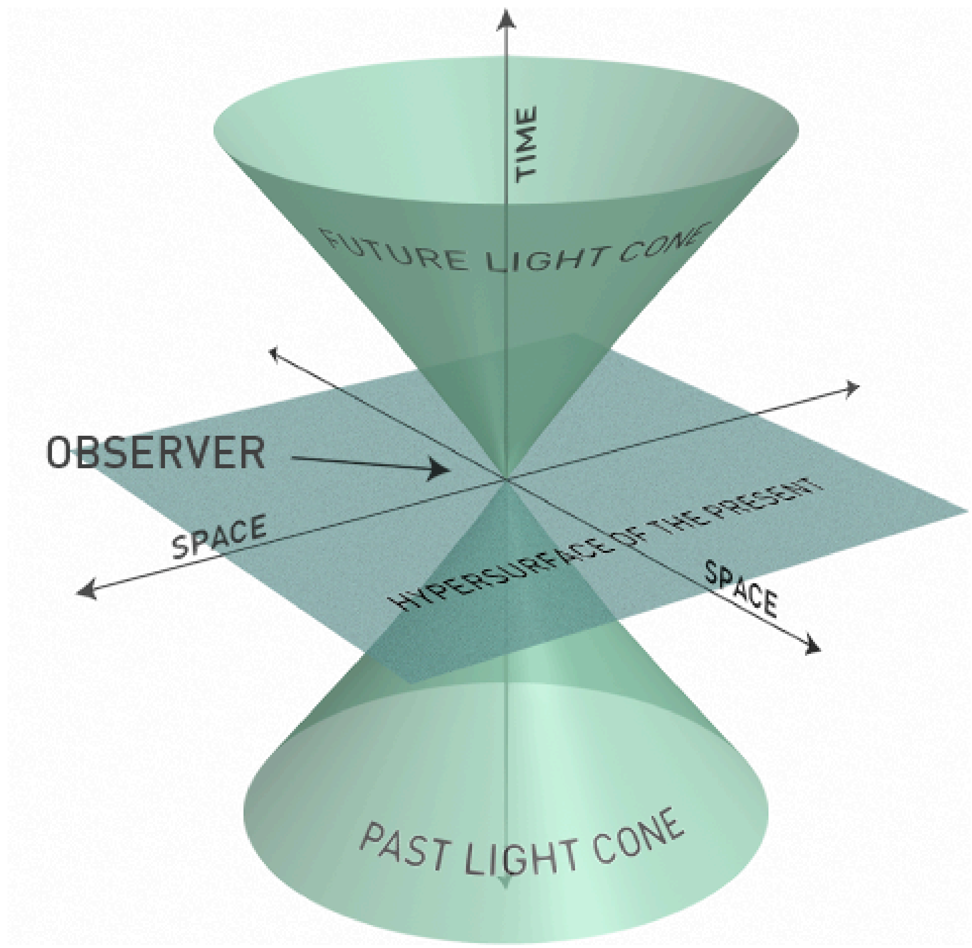
- Kosmologische Beobachtungen: iA schwierig, da de größte Teil des Universums sehr weit weg ist
- Am wichtigsten: endliche Lichtgeschwindigkeit -> eine Quelle im Abstand D sehen wir in einem Zustand, in dem sie D/c jünger war als heute **-> der heutige Zustand des Universums ist nur lokal beobachtbar**
- **Aber: Endlichkeit von c erlaubt, in die Vergangenheit zu sehen!**

- **Beispiel:**
- Euklidischer Raum, wir 'im Zentrum' x =0,

  heute $t = t_0$; wir können nur solche Raum-Zeit-Punkte

  sehen, für die gilt $|x|=c(t-t_0)$;

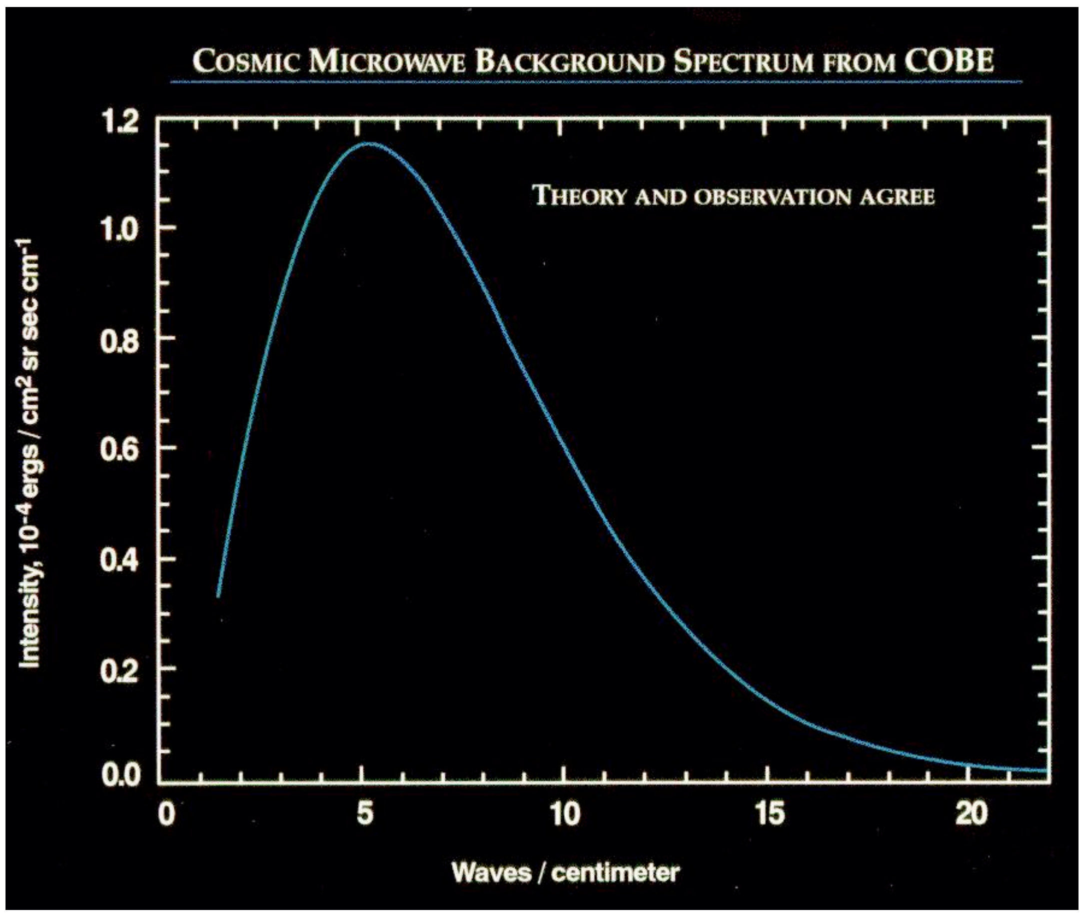
  ein beliebiger Raum-Zeit-Punkt (x,t) ist unbeobachtbar



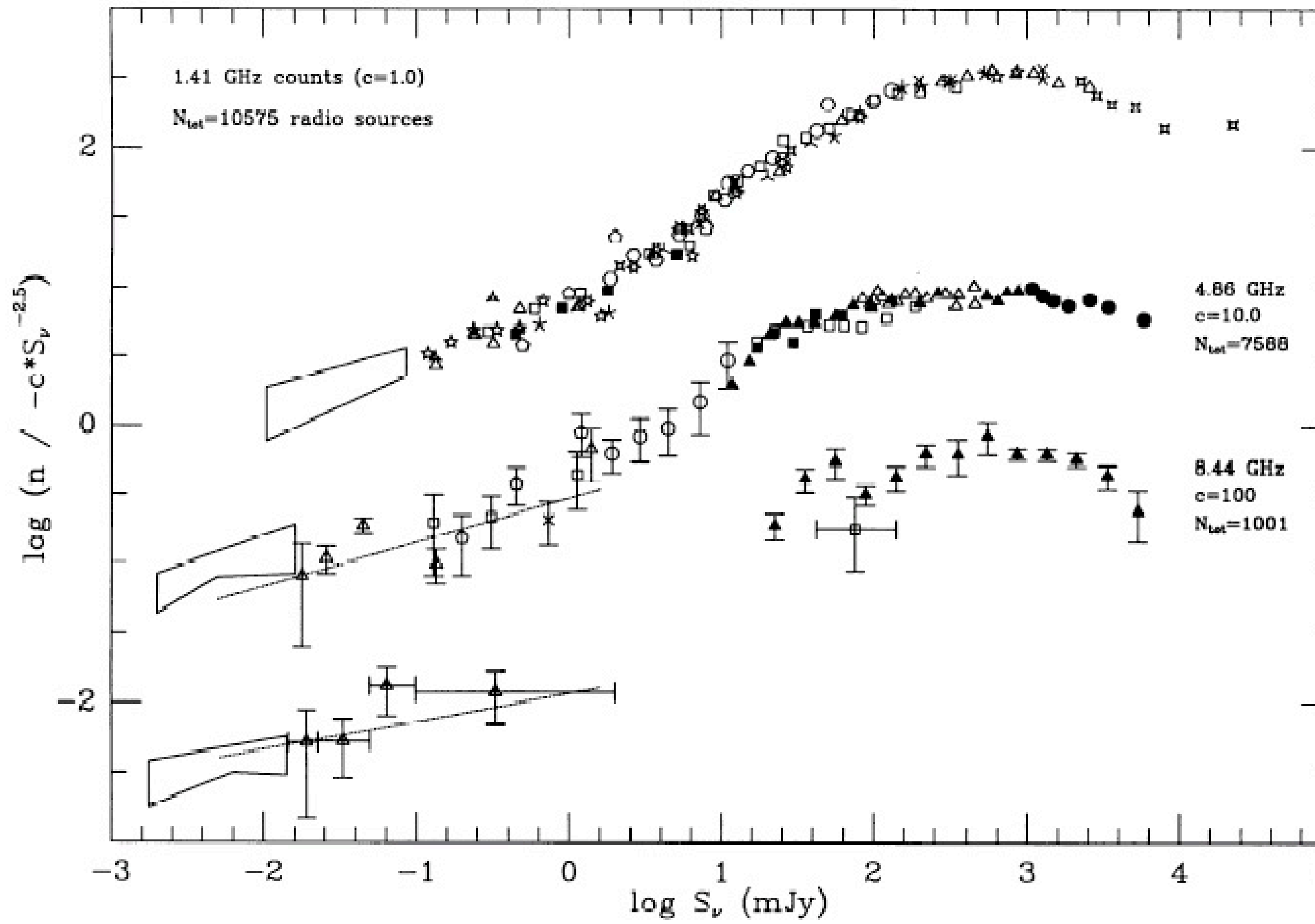
Grundlegende Beobachtungen

1. Nachts ist der Himmel dunkel
2. Gemittelt über große Winkelskalen sind lichtschwache Galaxien gleichförmig am Himmel verteilt
3. Bis auf wenige Ausnahmen (zB M31) zeigen die Spektren von Galaxien Rotverschiebungen: je größer die Entfernung, umso größer die Rotverschiebung (Hubble Gesetz)
4. In fast allen kosmischen Objekten (Gasnebel, HR-Sterne) beträgt der Massenanteil von He etwa 25-30%
5. Die ältesten Sternhaufen in der Milchstraße sind etwa 12 Gyr alt
6. Die kosmische Hintergrundstrahlung (CMBR) erreicht uns aus allen Richtungen, mit einer Anisotropie auf dem Niveau von ~ 10^{-5} (DMR Experiment auf COBE, WMAP)
7. Die CMBR ist eine perfekte Schwarzkörperstrahlung, dh Planckstrahlung mit $T = 2.728 \pm 0.004$ K (FIRAS auf COBE)
8. Die Anzahldichte von Radioquellen bei hoher Galaktischer Breite folgt *nicht* dem einfachen Gesetz $N(>S) \propto S^{-3/2}$

Grundlegende Beobachtungen



CMBR Spektrum als Intensität gegen Wellen/cm; Fehlerbalken sind kleiner als die Dicke der Linie!



Zählung der Radioquellen als Fkt. des Flusses, normiert durch die “Euklidische” Erwartung $N(S) \propto S^{-5/2}$ (für 3 verschiedene Frequenzen),

entsprechend den integrierten Zählungen $N(>S) \propto S^{-3/2}$

Die Zählungen weichen klar von der Euklidischen Erwatung ab!

Einfache Schlussfolgerungen

- **Annahme**: unendliches, statisches, euklidisches Universum => Widerspruch zu 1. und 8.!
- Olber's Paradoxon: in einem solchen Universum wäre der Himmel nachts hell - sogar sehr hell!
- Sei n_{stern} mittlere Anzahldichte von Sternen (laut Anahme const. in Raum und Zeit), mit mittlerem Radius R_{stern}; eine Kugelschale mit Radius r und Dicke dr enthält $4\pi r^2 dr \cdot n_{stern}$ Sterne. Jeder Stern nimmt den Raumwinkel $\pi\, R_{stern}^2/r^2$, dh die Sterne nehmen insgesamt den Raumwinkel $d\omega$ ein:

$$d\omega = 4\pi r^2 dr \cdot n_{stern} \frac{R_{stern}^2 \pi}{r^2} = 4\pi^2 n_{stern} R_{stern}^2 dr$$

- dies ist unabhängig vom Radius r der Kugelschale!
- Integration über alle Entfernungen liefert den gesamten Raumwinkel aller Sterne:

$$\omega = \int_0^\infty dr \frac{d\omega}{dr} = 4\pi^2 n_{stern} R_{stern}^2 \int_0^\infty dr = \infty$$

=> Sterne füllen den gesamten Himmel, aus jeder Richtung würde uns Sternlicht erreichen; da die spezifische Intensität I_ν entfernungs-unabhängig ist, wäre der Himmel ~ 10^4 K heiß!

=> eine der obigen Annahmen ist falsch!

Einfache Schlussfolgerungen

- **Quellenzählung**: betrachte Population von Quellen mit räumlich und zeitlich konstanter Leuchtkraftfunktion ; sei n(>L) = Anzahldichte von Quellen mit Leuchtkraft größer als L
- In einer Kugelschale mit Radius r und Dicke dr um uns herum befinden sich $4\pi r^2 dr \cdot n(>L)$ Quellen mit Leuchtkraft > L; da $L=4\pi r^2 S$ ist die Anzahl von Quellen mit Fluss S in dieser Kugelschale gegeben als:

$$dN(>S) = 4\pi r^2 dr \cdot n(>4\pi S r^2)$$

$$\Rightarrow \quad N(>S) = \int_0^\infty dr\, 4\pi r^2 n(>4\pi S r^2)$$

Integration über den Radius der Kugelschale => Gesamte Zahl von Quellen mit Fluss > S

- Änderung der Integrationsvariablen $L = 4\pi S r^2, \quad r = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}, \quad dr = \frac{dL}{2\sqrt{4\pi L S}}$
- ergibt:

$$N(>S) = \int_0^\infty \frac{dL}{2\sqrt{4\pi L S}} \frac{L}{4\pi S} n(>L) = \frac{1}{16\pi^{3/2}} S^{-3/2} \int_0^\infty dL \sqrt{L}\, n(>L)$$

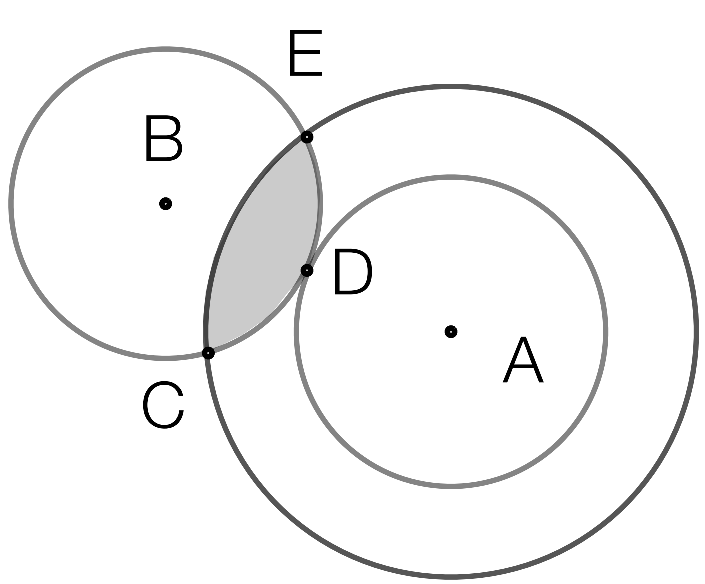
=> unabhängig von der Leuchtkraftfunktion wären Quellzählungen in einem solchen Universum $N(>S) \propto S^{-3/2}$, und dies ist in Widerspruch zu den Beobachtungen!

=> eine Annahme muss falsch sein!

Hubble Fluss (Rotverschiebungen der Galaxien) suggeriert, dass das Universum nicht statisch ist!

Einfache Schlussfolgerungen

- Aus 5. (Alter von Sternhaufen, siehe WS06/07!) => das Universum ist mindestens 12 Gyr alt; die Übereinstimmung mit der Hubble-Zeit, $H_0^{-1}=10h^{-1}$ Gyr suggeriert, dass die Hubble-Expansion mit der Entwicklung des Universums zusammenhägt
- Aus 2 (Galaxienverteilung) und 6 (Isotropie der CMBR): auf großen Winkelskalen scheint das Universum um uns herum isotrop, mit hoher Genauigkeit.
- Ist unser Ort im Universum von anderen ausgezeichnet? Wenn nicht: Universum ist isotrop um jeden Punkt, daher homogen
- Homogenität kann prinzipiell nicht beobachtet werden; Beobachtungen von weit entfernten Gebieten zeigen diese zu früheren Zeiten, Entwicklungseffekte können nicht direkt von räumlichen Variationen getrent werden
- Jedoch: es gibt keine Hinweise auf Strukturen im Kosmos auf Skalen >> 100 Mpc, Homogenität scheint plausibel

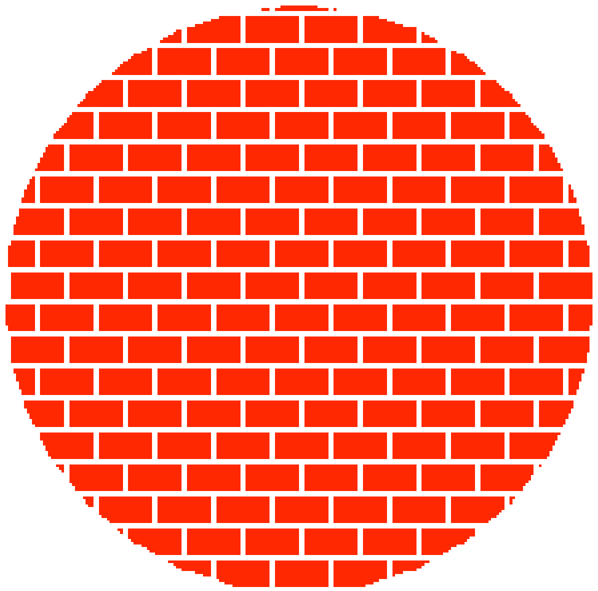


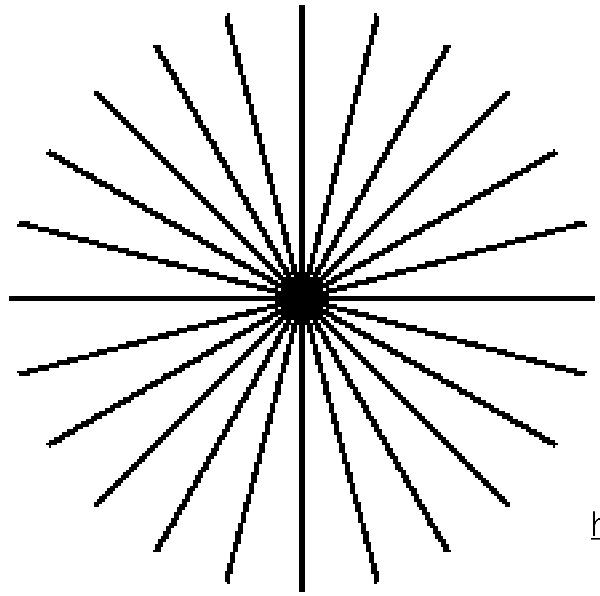
aus Isotropie um 2 Punkte => Homogenität:
ist das Universum um B isotrop, ist die Dichte gleich in C, D und E. Indem man Schalen mit unterschiedlichen Radien um A konstruiert wird gezeigt, dass der schraffierte Teil homogen sein muss

Kosmologisches Prinzip: für alle Beobachter sieht das Universum gleich aus; oder: das Universum ist homogen und isotrop

Einfache Schlussfolgerungen

Struktur ist homogen (im Mittel konstant), jedoch nicht isotrop (hat eine Vorzugsrichtung) →





← Struktur ist isotrop (keine Vorzugsrichtung), jedoch nicht homogen (Verdünnung)

http://www.astro.ucla.edu/~wright

- **Bemerkungen:**

→ wenn das Universum auf großen Skalen komplex wäre, könnten wir nicht auf vollständige Beschreibung hoffen

→ Homogene und isotrope Weltmodelle sind die einfachsten Lösungen der Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART); man kann untersuchen, wie weit solche Modelle mit den Beobachtungen übereinstimmen

→ Aus dem **kosmologischen Prinzip** folgen die vorher erwähnten Beobachtungstatsachen

→ Auf kleinen Skalen ist das Universum bestimmt nicht homogen: die Inhomogenitäten werden als kleinskalige "Störungen" betrachtet, und quantitativ beschrieben

Das expandierende Universum

- Grundlegenden Kraft im Universum: Gravitation (nur Gravitation und EM Kräfte wirken auf großen Längenskalen, da Materie im Kosmos im Mittel neutral, spielen EM auf diesen Skalen keine Rolle)
- Theorie der Gravitation: ART, Einstein 1915; Grenzfall für schwache Gravitationsfelder und "kleinen" Skalen: Newtonsche Gravitationstheorie
- Motivation: die Beschreibung mittels ART ist dann nötig, wenn die betrachteten Skalenlängen mit dem Krümmungsradius der Raumzeit vergleichbar sind. Dies ist in unserem Universum bestimmt der Fall.
- Andererseits: in einem *homogenen* Universum ist jedes kleine Raumgebiet charakteristisch für das ganze Universum; kennt man die Entwicklung eines kleinen Raumgebiets, so kennt man aufgrund der Homogenität die Geschcihte des gesamten Unibversums
- Auf kleinen Skalen ist die Newtonsche Betrachtung gerechtfertigt

  => ausgehend vom kosmologischen Prinzip werden wir räumlich homogene und isotrope Weltmodelle betrachten, zunächst im Rahmen der Newtonschen Mechanik

Kinematische Beschreibung

- **Mitbewegte Koordinaten**: betrachte homogene Kugel der Dichte ρ(t); erlaube radiale Expansion oder Kontraktion der Kugel, so dass ρ räumlich homogen bleibt; wähle einen Zeitpunkt $t = t_0$ und führe zu diesem Zeitpunkt räumliches Koordinatensystem x ein, mit dem Ursprung im Mittelpunkt der Kugel
- Ein Teilchen der Kugel mit Ort x zur Zeit t_0 habe zu einem anderen Zeitpunkt t die räumliche Koordinate **r**(t), die sich aus der Expansion der Kugel ergibt. Da radiale Expansion, ist die Richtung von **r**(t) konstant; da $\mathbf{r}(t_0) = x$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{r}(t) = a(t)\boldsymbol{x}$$

- a(t) = kosmischer Skalenfaktor, kann nur von t abhängen (aus Erhaltung der Homogenität von ρ)

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{x} \Rightarrow a(t_0) = 1$$

- wir wählen t_0 = heute.
- Teilchen (Beobachter) die sich entsprechend **r**(t) = a(t)**x** bewegen, heissen **mitbewegte Beobachter** (comoving observers); **x = mitbewegte Koordinate**; die Weltlinie (**r**,t) jedes mitbewegten Beobachters ist durch **x** eindeutig gegeben

$$(\boldsymbol{r}, t) = [a(t)\boldsymbol{x}, t]$$

Kinematische Beschreibung

- **Expansionsrate**: die Geschwindigkeit eines solchen mitbewegten Teilchens ist

$$\mathrm{v}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{da}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{x} \equiv \dot{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} = \frac{\dot{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{H}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{r}$$

- mit der Definition:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{t}) \equiv \frac{\dot{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{a}}$$

Expansionsrate,
eng mit der Hubble-Konstanre verknüpft!

- Die Relativgeschwindigkeite zweier Teilchen bei r und r +Δr ist:

$$\Delta\mathrm{v} = \mathrm{v}(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) - \mathrm{v}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{t})\Delta\boldsymbol{r}$$

=> die Relativgeschwindigkeit isr proportional zum Abstandsvektor; die **Proportionalitätskonstante H(t)** hängt nur von der Zeit, nicht aber vom Ort der beiden Teilchen ab; dieses Gesetz ist dem empirischen Hubble-Gesetz sehr ähnlich:

$$\mathrm{v} = \boldsymbol{H}_0\boldsymbol{D}$$

v = Relativgeschwindigkeit einer Quelle im Abstand D von uns

Kinematische Beschreibung

=> Δv=H(t)Δr ist die Verallgemeinerung für einen beliebigen Zeitpunkt

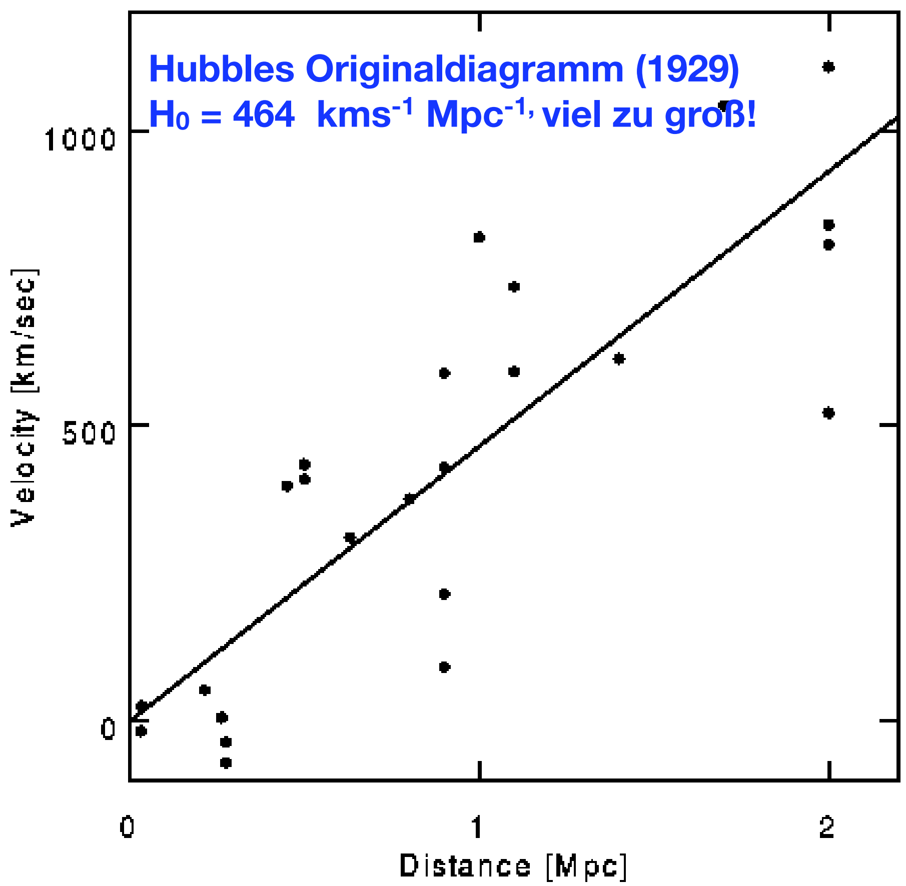
=> jeder Beobachter, der mit der Kugel expandiert, sieht um sich herum isotropes Geschwindigkeitsfeld, entsprechend dem Hubble Gesetz

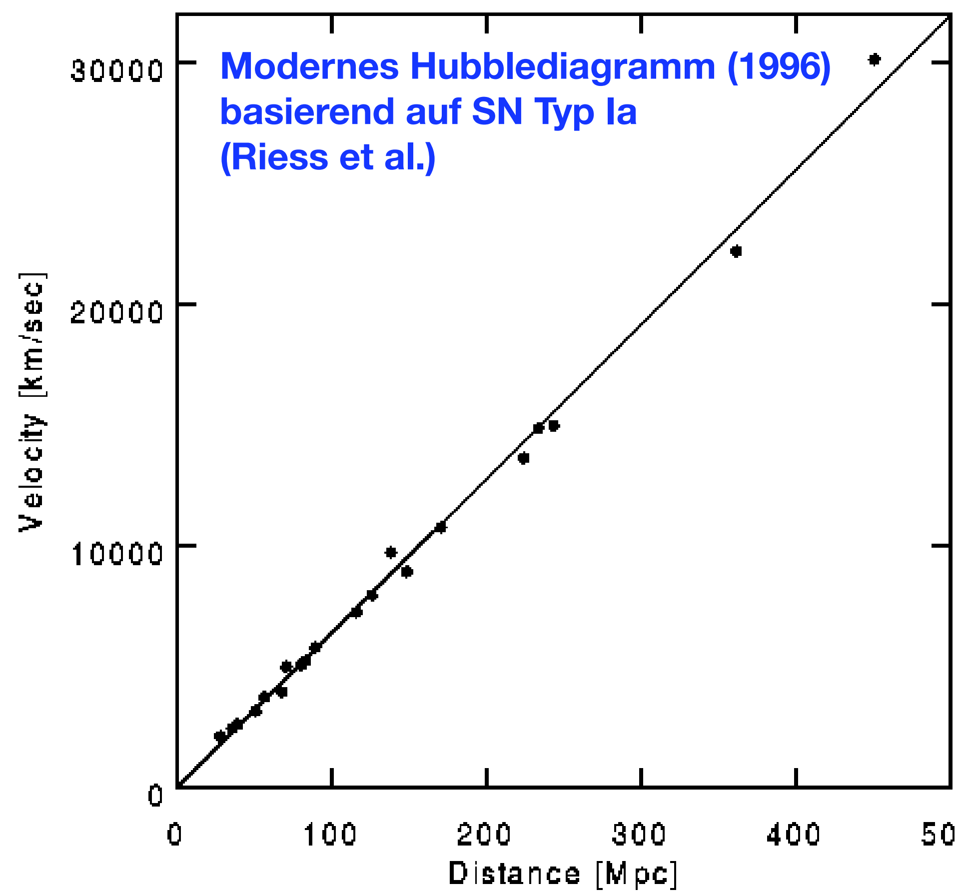
- da wir heute eine Expansion beobachten (Quellen bewegen sich von uns weg) ist:

$$H(t_0) > 0$$

$$\dot{a}(t_0) > 0$$

Hubble-Parameter heute $H_0 \equiv H(t_0)$ **Hubble Konstante H_0 = 71±4 kms^{-1} Mpc^{-1}**





Dynamik der Expansion

- Bisherige Diskussion: beschrieb die Kinematik der Expansion. Um den zeitlichen Verlauf von a(t) zu erhalten, und damit auch die Bewegung mitbewegter Beobachter und die Entwicklung der Dichte, müssen wir eine dynamische Betrachtung durchführen. Die Entwicklung der Expansionsrate wird durch die Eigengravitation der Kugel bestimmt, von dieser wird erwartet, dass sie die Expansionsgeschwindigkeit abbremst (Druckkräfte werden erstmal vernachlässigt!).
- **Bewegungsgleichung**: wir betrachten Kugelschale mit Radius x zur Zeit t_0, und Radius r(t) = a(t) x für beliebiges t; die Masse M(x) innerhalb der Kugelschale ist konstant in der Zeit:

$$M(x) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 x^3 = \frac{4\pi}{3}\rho(t) r^3(t) = \frac{4\pi}{3}\rho(t) a^3(t) x^3$$

ρ_0 = Massendichte des Universums heute t =t_0

- Die Dichte ist eine Funktion der Zeit und nimmt ab wie:

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3}(t)$$

Massenerhaltung

- Gravitationsbeschleunigung eines Teilchens auf dieser Kugelschale ist $\frac{GM(x)}{r^2}$ und nach innen gerichtet.

Dynamik der Expansion

- Daraus ergibt sich die **Bewegungsgleichung des Teilchens** zu:

$$\ddot{r}(t) \equiv \frac{d^2 r}{dt^2} = -G\frac{M(x)}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0 x^3}{r^2}$$

- oder, nach der Substitution

$$r(t) = a(t)x$$

$$\ddot{a}(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{x} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^2(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)a(t)$$

- **Diese Bewegungsgleichung ist unaghängig von x!**
- **Die Dynamik der Expansion, ausgedrückt durch a(t), wird allein von der Materiedichte bestimmt!**
- Eine weitere Möglichkeit, die Dynamik der expandierenden Kugel auszudrücken, ergibt sich durch den Energieerhaltungssatz: die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist zeitlich konstant

Dynamik der Expansion

- **Energieerhaltung:** wir multiplizieren die letzte Gleichung mit $2\dot{a}$ und integrieren nach der Zeit:

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{1}{a(t)} - Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a^2(t) - Kc^2$$

Kc^2 = Integrationskonstante

- Multiplikation mit $x^2/2$ ergibt:

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{GM}{r(t)} = -Kc^2\frac{x^2}{2}$$

die kinetische + potentielle Energie (pro Masse) eines Teilchens ist eine Konstante; daher beschreibt diese **Gleichung die Energieerhaltung**

- K ist proportional zur Gesamtenergie eines mitbewegten Teilchens => die Geschichte der Expansion ist von K abhängig; das Vorzeichen von K charakerisiert das qualitative Verhalten der Expansion

  K < 0: die rechte Seite ist immer > 0, da da/dt > 0 heute, bleibt da/dt > 0 für alle Zeiten, das Universum wird ewig expandieren ($E > 0$, $E_{kin} > E_{pot}$)

  K = 0: die rechte Seite ist immer positiv, da/dt > 0 für alle Zeiten, das Universum expandiert ewig, aber so, dass da/dt -> 0 für t -> ∞ (der Grenzwert der Expansionsgeschwindigkeit für $t \to \infty$ ist Null)

  K > 0: die rechte Seite wird 0 wenn $a = a_{max} = (8\pi G\rho_0)/(3Kc^2)$; dort ist da/dt = 0, danach rekollabiert das Universum wieder ($E < 0$)

Dynamik der Expansion

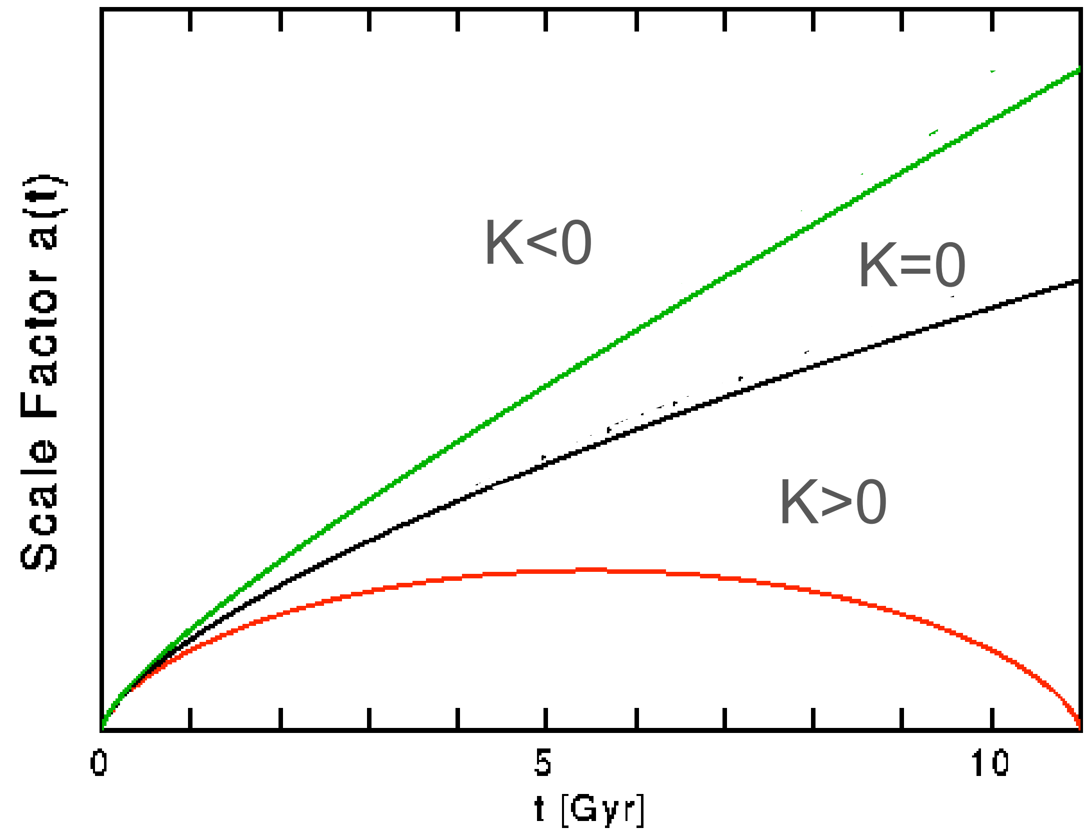
- **Spezialfall: K =0 => die kritische Dichte für t =t_0 und H_0 = da/dt(t_0):**

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 g\ cm^{-3}$$

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c}$$

Definition: Dichteparameter

$$K > 0 \Rightarrow \Omega_0 > 1$$
$$K = 0 \Rightarrow \Omega_0 = 1$$
$$K < 0 \Rightarrow \Omega_0 < 1$$



Das Verhalten des Skalenfaktors a (t) für die 3 möglichen Fälle für das Vorzeichen von K

- Wie wir noch sehen werden, ist $\Omega_{sichtbar} \leq 0.01$

$$\Omega_0 \simeq 1$$

Modifikation durch ART

- Newtonsche Betrachtungsweise: enthält wesentliche Aspekte der homogenen und isotropen Weltmodelle; die meisten der obigen Gleichungen bleiben auch in der relativistischen Kosmologie gültig → jedoch werden sie anders interpretiert!
- Insbesondere: das Bild der “expandierenden Kugel” muss revidiert werden - dieses Bild impliziert, dass es einen “Mittelpunkt” des Universums gibt; die widerspricht implizit dem kosmologischen Prinzip, nach dem kein Punkt vor anderen ausgezeichnet ist → das Universum hat weder ein Mittelpunkt, noch expandiert es von einem Mittelpunkt weg
- Allerdings enthalten die entscheidenden Gleichungen (Entwicklung der Dichte, und des Skalenparameters) keine Größen mehr, die auf eine Kugel Bezug nehmen
- ART modifiziert die Newtonsche Theorie:

    Materie mit Druck modifiziert die Bewegungsgleichungen (bisher nur Materie ohne Druck betrachtet, jedoch muss auch die Energiedichte des Strahlungsfeldes in die Bewegungsgleichungen eingehen; das Strahlungsfeld werden wir als Materie mit Druck charakterisieren können)

    die Einsteinsche Feldgleichungen der ART enthält zusätzlichen Term, die **kosmologische Konstante**

    Interpretation der Expansion wird geändert: nicht die Teilchen (Beobachter) expandieren voneinander weg, sondern **der Raum selbst expandiert**; insbesondere ist die Rotverschiebung keine Doppler-Rotverschiebung, sondern selbst eine Eigenschaft expandierender Raum-Zeiten (lokal kann man sich die Rotverschiebung immer noch als Doppler-Effekt vorstellen)

Modifikation durch ART

- **Erster HS der Thermodynamik:** die Änderung der inneren Energie dU bei einer (adiabatischen) Volumenänderung dV ist die Arbeit dU = -P dV, mit P = Druck des Gases
- Aus den Gleichungen der ART, angewandt auf einen homogenen isotropen Universum folgt in Analogie zum 1. HS für **Materie mit Druck:**

$$\frac{d}{dt}(c^2 \rho a^3) = -P \frac{da^3}{dt}$$

Interpretation: Energiedichte = ρc^2 (= Materiedichte x c^2); Volumen $\propto a^3$

=> **Änderung der Energie = - Druck × Volumenänderung**

- (ohne Druck gilt $\rho(t) a^3(t) = ct.$)
- Die vorherige Bewegungsgleichung

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t) a(t)$$

- wird modifiziert zu:

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho(t) + \frac{3P}{c^2} \right) a(t)$$

⇒ **Druck wirkt als zusätzliche Quelle der Gravitation**

Die Friedmann-Lemaître-Expansionsgleichungen

- Für ein homogenes und isotropes Universum ergibt die Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen die Bewegungsleichungen:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}$$

wobei: ρ = mittlere Energiedichte des Universums

a(t) = kosmischer Skalenfaktor

K = Krümmungsparameter

P = Druck

Λ = kosmologische Konstante

=> gegenüber den vorherigen Gleichungen enthalten diese die kosmologische Konstante und einen Druckterm!

=> Verknüpfung der Expansion des Universums mit der Gesamtenergiedichte, und der Raumkrümmung

Die Kosmologische Konstante

- **Bedeutung des Λ-Terms in den vorherigen Gleichungen:**
- Einstein modifizierte seine Feldgleichungen, um eine statische Lösung der resultierenden Expansionsgleichungen zu erhalten
- Er hatte jedoch keine gute physikalische Interpretation für diese Konstante, und nachdem die Expansion von Hubble entdeckt wurde, verwarf er sie wieder
- Λ wurde danach lange Zeit ignoriert
- Heute: es gibt Beobachtungshinweise (seit 1998) auf $\Lambda \neq 0$, dies wird als Energiedichte des Vakuums interpretiert, ein QM Phänomen
- Im Prinzip sollte dann Λ mittels der QM berechnbar sein, die Abschätzungen sind um etwa 10^{120} zu groß!
- Dies ist heutzutage eines der größten Probleme der Teilchenphysik ("dunkle Energie"), eine erfolgreiche Theorie sollte Λ vorhersagen können!

$$c^2 \rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}$$

Energiedichte des Vakuums

Materiekomponenten im Universum

- **Man unterscheidet folgende Arten von Materie:**

Kosmologischer "Staub" (ρ_m): Materie ohne Druck; wenn die thermische Bewegung der Materieteilchen << c, $P \ll \rho c^2$; zB sämtliche NR Materie (baryonische und dunkle Materie)

$$P_m = 0$$

Strahlung (ρ_r): Materie mit Druck, $k_B T \gg mc^2$, thermische Bewegung der Teilchen ist (ultra-) relativistisch; zB Photonen oder leichte Neutrinos; der Druck ist über die Zustandsgleichung mit ρ verbunden:

$$P_r = \frac{1}{3}\rho_r c^2$$

Vakuum (ρ_Λ), oder die kosmologische Konstante. Die Zustandsgleichung für eine Vakuumenergie ergibt sich aus dem 1. HS der Thermodynamik. Da die Energiedichte des Vakuums zeitlich und räumlich konstant ist, folgt aus

$$\frac{d}{dt}(c^2 \rho a^3) = -P\frac{da^3}{dt}$$

$$P_V = -\rho_V c^2$$

=> die Vakuumsenergie besitzt negativen Druck!

(da $U \propto V$ => Vergrößerung um dV => Erhöhung von U => aus dU=-PdV folgt, dass P negativ sein muss).

‘Herleitung’ der Expansionsgleichungen

- Wir gehen von der Energieerhaltung aus:

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{1}{a(t)} - Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a^2(t) - Kc^2$$

- und differenzieren beide Seiten nach der Zeit:

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2a\dot{a}\rho)$$

- Wir führen die Differentiation in $\frac{d}{dt}(c^2\rho a^3) = -P\frac{da^3}{dt}$ aus und erhalten:

$$\dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} = -3Pa^2\dot{a}\frac{1}{c^2}$$

- Diese Gleichung benutzen wir, um in der zweiten Gleichung den Term mit dρ/dt zu ersetzen; wir erhalten:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)$$ **Bewegungsgleichung**

=> der Druckterm in der Bewegungsgleichung ergibt sich, wenn man die Energieerhaltung mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik koppelt

Die 3 Materiekomponenten im Universum

- Wir betrachten die 3 Materiekomponenten im Kosmos und schreiben die Dichte und den Druck als Summe von Staub, Strahlung und Vakuumsenergie:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_V = \rho_{m+r} + \rho_V$$
$$P = P_m + P_r + P_V = P_r + P_V$$

- setzen wir die erste Gleichung in die Energieerhaltungsgleichung

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a^2(t) - Kc^2$$

- ein, so ergibt sich die erste Friedmann-Gleichung, falls die Dichte ρ mit der Dichte ρ_{m+r} identifiziert wird, und wenn

$$\rho_V = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

- setzen wir weiterhin die obigen Zerlegungen von Dichte und Druck in die Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich die zweite Friedmann-Gleichung, wenn wir ρ und P mit ρ_{m+r} und P_r identifizieren

  => wir erhalten also beide Friedmann-Gleichungen aus dieser Betrachtung; die Dichte und der Druck beziehen sich dabei auf "normale" Materie → sämtliche Materie mit Ausnahme des Λ-Beitrags

Diskussion der Expansionsgleichungen

- Erstmal betrachten wir die Entwicklung der kosmischen Dichte in den verschiedenen Komponenten; diese folgt aus

$$\frac{d}{dt}(c^2 \rho a^3) = -P \frac{da^3}{dt}$$

- Für **druckfreie Materie** ergibt sich:

$$\rho_m \propto a^{-3}$$

- Setzt man die Zustandsgleichung für Strahlung ein ($P_r = 1/3 \rho_r c^2$), ergibt sich für **Strahlung**:

$$\rho_r \propto a^{-4}$$

- Die **Energiedichte des Vakuums ist eine zeitliche Konstante**. Es folgt also:

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} a^{-3}(t); \quad \rho_r(t) = \rho_{r,0} a^{-4}(t); \quad \rho_V(t) = \rho_V = const.$$

- Strahlung: wie bei der Materie ändert sich die Anzahldichte der Photonen wie a^{-3}, da die Zahl der Photonen in einem mitbewegten Volumen unverändert bleibt; jedoch werden die Photonen durch die Expansion rotverschoben, sie ändern ihre Wellenlänge $\propto a$; da die Energie eines Photons $E = h\nu$, und $\nu = c/\lambda$, ändert sich die Energie des Photons durch die kosmische Expansion wie a^{-1} => Energiedichte $\propto a^{-4}$

Diskussion der Expansionsgleichungen

- Wir definieren die dimensionslosen Dichteparameter für Materie, Strahlung und Vakuum:

$$\Omega_m = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_c};\quad \Omega_r = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_c};\quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_V}{\rho_c} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

- so dass

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = \Omega_0$$

- Heute: die Materiedichte von Galaxien (inkl. dunkle Halos)

$$0.02 \le \Omega_m \le 0.3$$ **Materiedichte**

- Energiedichte der Strahlung ist sehr viel kleiner (dominiert durch Photonen des CMBR und Neutrinos aus dem frühen Universum):

$$\Omega_r \approx 4.2 \times 10^{-5} h^{-2}$$ **Strahlungsdichte**

- Das Verhältnis zwischen Materie und Strahlung ändert sich jedoch mit dem Skalenfaktor, denn es gilt ja:

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} a^{-3}(t);\quad \rho_r(t) = \rho_{r,0} a^{-4}(t)$$

Diskussion der Expansionsgleichungen

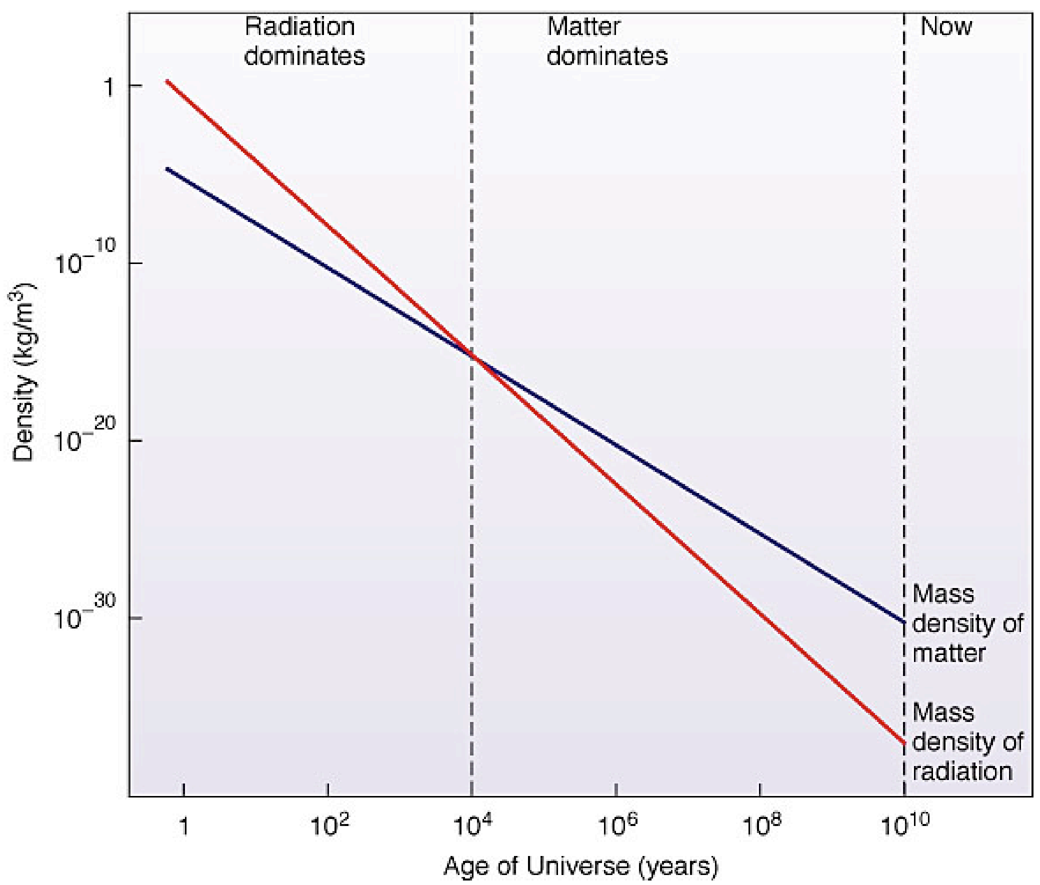
- Da sich also ρ_r schneller mit der Zeit ändert als ρ_m, gilt:

$$\frac{\rho_r(t)}{\rho_m(t)} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}} \frac{1}{a(t)} = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \frac{1}{a(t)}$$

- Strahlung und Materie hatten also die gleiche Energiedichte bei dem Skalenfaktor:

$$a_{eq} = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} = 4.2 \times 10^{-5} h^{-2} \Omega_m^{-1}$$

- Dieser Wert des Skalenfaktors wird eine wichtige Rolle bei der Entwicklung von Strukturen im Universum spielen!



Diskussion der Expansionsgleichungen

- Mit: $\rho(t) = \rho_{m+r}(t) = \rho_{m,0} a^{-3}(t) + \rho_{r,0} a^{-4}(t)$
- und $\Omega_m = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_c}; \quad \Omega_r = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_c}; \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_V}{\rho_c} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$
- kann die Expansionsgleichung geschrieben werden als:

$$H^2(t) = H_0^2 \left(a^{-4}(t)\Omega_r + a^{-3}(t)\Omega_m - a^{-2}(t)\frac{Kc^2}{H_0^2} + \Omega_\Lambda \right)$$

- Spezialisierung auf heute, mit $H(t_0)=H_0$ und $a(t_0) = 1$ liefert den Wert der Intergrationskonstante K:

$$K = \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 (\Omega_0 - 1) \approx \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 (\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1) \qquad [K] = (\text{Länge})^{-2}$$

- wobei $\Omega_r \ll \Omega_m$
- ART: K wird als Krümmung des Universums zum heutigen Zeitpunkt interpretiert; oder genauer:
- **der homogene, isotrope, drei-dimensionale Raum zur Zeit $t=t_0$ hat die Krümmung K**

Diskussion der Expansionsgleichungen

- **Wir unterscheiden folgende Fälle:**

  K = 0: Raum ist bei einer festen Zeit t euklidisch, d.h. flach

  K > 0: $K^{-1/2}$ kann als Krümmungsradius eines sphärischen Raumes interpretiert werden (2-D Analogon = Kugeloberfläche); die Größenordnung des Krümmungsradius beträgt c/H_0

  K < 0: entspricht einem hyperbolischen Raumes (2-D Analogon = Oberfläche eines Sattels)

  Bemerkung: Einsteinsche Feldgleichung sagt etwas über die Raumkrümmung aus, nicht aber über die Topologie des Universums (zB ist Zylinderoberfläche ebenfalls “flacher” Raum wie Ebene, hat jedoch eine andere Topologie)

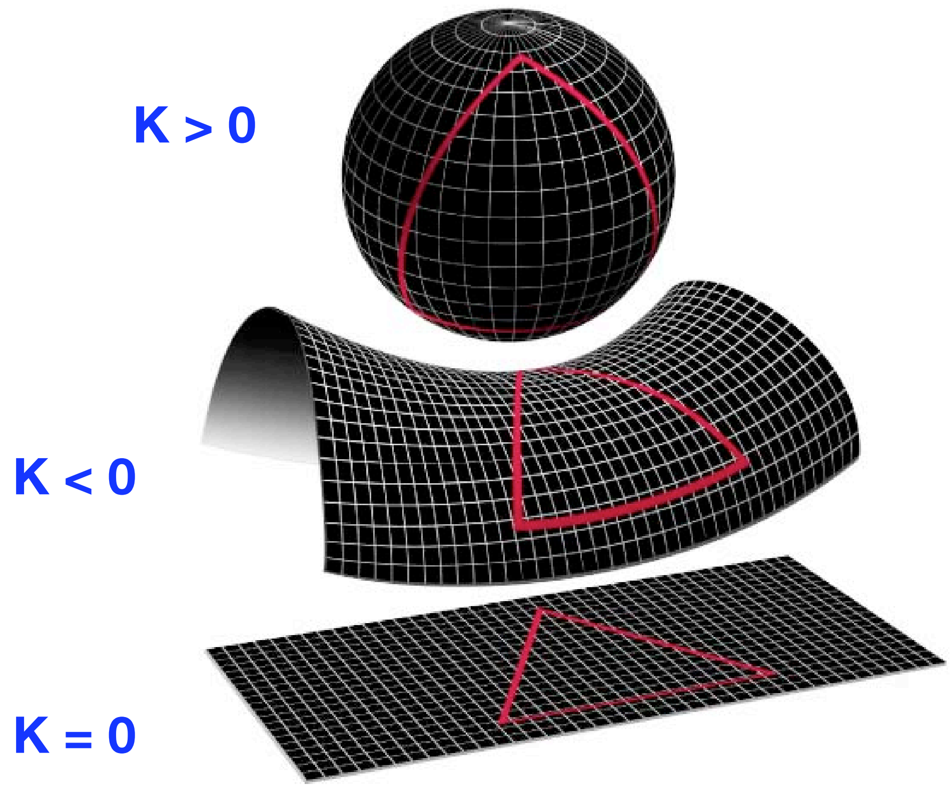
- Falls das Universum eine “einfache” Topologie besitzt:

  K > 0: Universum ist endlich

  K ≤ 0: Universum ist unendlich

  (in beiden Fällen unbegrenzt; Kugeloberfläche

  ist endlicher, aber unbegrenzter Raum)



Expansionsgleichungen und Urknall

- **Wir erhalten für die Expansionsgleichung:**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = H_0^2\left(a^{-4}(t)\Omega_r + a^{-3}(t)\Omega_m + a^{-2}(t)(1-\Omega_m-\Omega_\Lambda)+\Omega_\Lambda\right)$$

- **Diskussion:**

  für sehr kleine a dominiert der erste Term; das Universum ist strahlungsdominiert

  für etwas größere a $\gtrsim a_{eq}$ dominiert der zweite Term; das Universum ist Materie- (Staub-) dominiert

  falls $K \neq 0$, wird für größere a der dritte Term dominieren, der Krümmungsterm

  für sehr große a dominiert die kosmologische Konstante

- **Die obige Differentialgleichung** kann iA nicht analytisch gelöst werden (wobei die numerische Lösung von a(t) unproblematisch ist). Man kann jedoch das Verhalten von a(t) qualitativ untersuchen, und dabei die wesentlichen Aspekte der Expansion verstehen

- **Heute**:

  da/dt > 0, Expansion => da/dt > 0 für alle t, es sei denn, die rechte Seite = 0 für einen Wert von a

  falls $H^2 = 0$ für ein a > 1 => Expansion kommt zum Stillstand, für spätere Zeiten rekollabiert das Universum

  falls $H^2 = 0$ für ein $0 < a_{min} < 1$ => das Universum hat vorher kollabiert, danach Expansion

- Welche der Möglichkeiten realisiert ist, hängt von den kosmologischen Parameter ab

Expansionsgleichungen und Urknall

- Falls **$\Lambda = 0$**, so ist $H^2 > 0$ für alle $a \leq 1$; das Verhalten für $a > 1$ hängt von Ω_m ab:

  falls $\Omega_m \leq 1$ (bzw $K \leq 0$) ist $H^2 > 0$ für alle a: das Universum expandiert für alle Zeiten

  falls $\Omega_m > 1$ ($K > 0$), verschwindet H^2 für $a = a_{max} = \Omega_m/(\Omega_m-1)$; das Universum erreicht maximale Expansion bei a_{max}, danach rekollabiert es wieder

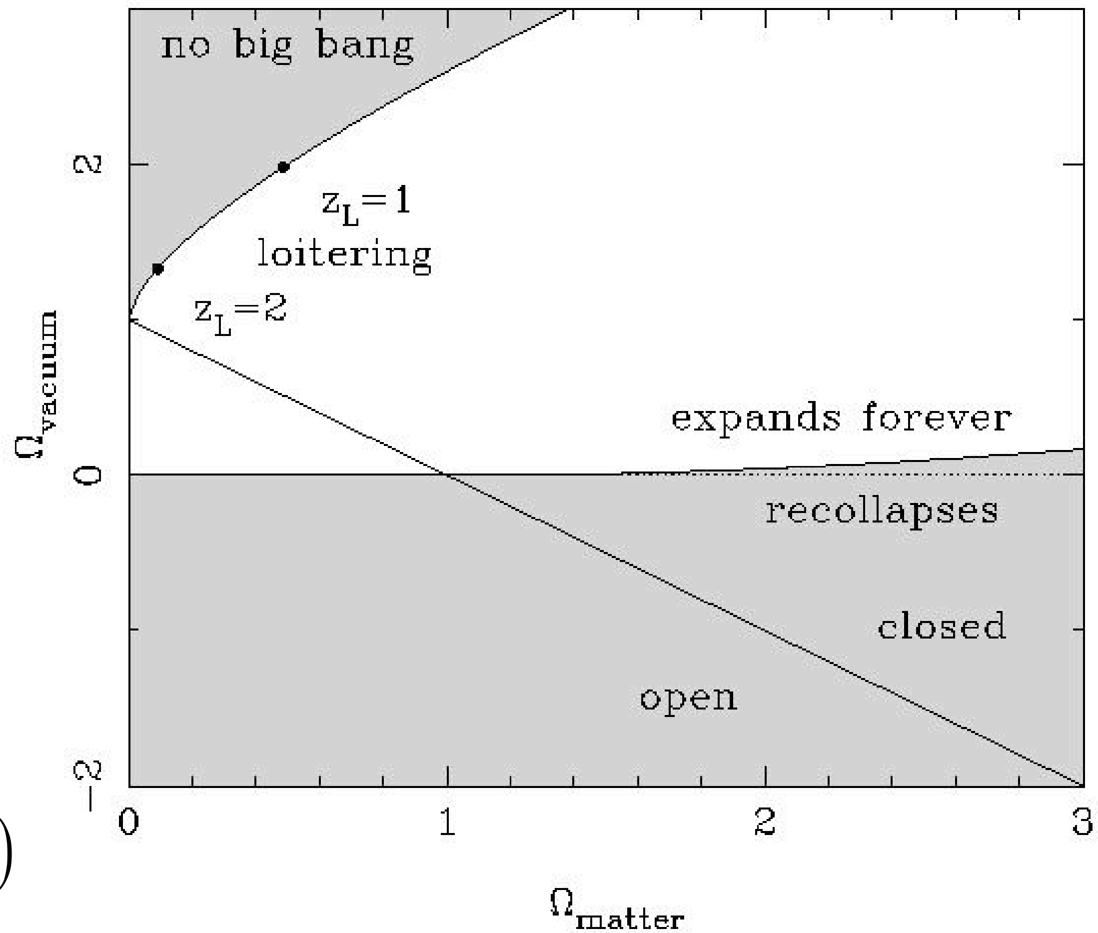
- Falls **$\Lambda > 0$**, die Diskussion ist komplizierter:

  falls $\Omega_m < 1$ expandiert das Universum für alle $a > 1$

  falls $\Omega_m > 1$, hängt die Zukunft von Ω_Λ ab: falls Ω_Λ klein genug, kommt es zur Rekollabierung, sonst ewige Expansion

  falls $\Omega_\Lambda < 1$, ist $H^2 > 0$ für alle $a \leq 1$

  falls $\Omega_\Lambda > 1$ ist es im Prinzip möglich, dass $H^2 = 0$ für ein $a < 1$; solche Modelle, bei denen es in der Vergangenheit einen minimalen Wert von a gegeben hat werden jedoch durch Beobachtungen ausgeschlossen



$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = H_0^2\left(a^{-4}(t)\Omega_r + a^{-3}(t)\Omega_m + a^{-2}(t)(1-\Omega_m-\Omega_\Lambda)+\Omega_\Lambda\right)$$

Expansionsgleichungen und Urknall

- Ergebnis (bis auf den letzten Fall, der durch Beobachtungen ausgeschlossen ist):

  Die Expansionsgleichung besagt, dass es einen Zeitpunkt gegeben haben muss, wo a = 0

  Für a → 0 divergiert die Materiedichte, dieser Zustand muss also singuläre Dichte besitzen

  Den Zeitpunkt mit a = 0, und die Entwicklung aus diesem Zustand nennt man **Urknall (Big Bang)**

  Den Zeitpunkt, bei dem a = 0, wählt man als Ursprung der Zeit, so dass t = Weltalter

- Wie wir zeigen werden: die Vorhersagen des Big Bang Modells stimmen in beeindruckender Weise mit den Beobachtungen überein!
- Definition des Abbremsungsparameters (bei $t = t_0$, deceleration parameter):

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a} \cdot a}{\dot{a}^2}$$

- Es folgt $$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda$$

  => für genügend großes Ω_Λ kann q_0 negativ werden=> Expansion des Universums ist beschleunigt

  Wie wir noch sehen werden gibt es Hinweise (durch Beobachtungen entfernter Supernovae Typ Ia), dass in der Tat $q_0 < 0$, die Expansion also beschleunigt ist

Weltalter

- Das **Weltalter** bei einem gegebenen **Skalenfaktor a** folgt aus $dt = da\left(\frac{da}{dt}\right)^{-1} = \frac{da}{a \cdot H}$

$$t(a) = \frac{1}{H_0}\int_0^a da\left[a^{-2}\Omega_r + a^{-1}\Omega_m + (1-\Omega_m-\Omega_\Lambda) + a^2\Omega_\Lambda\right]^{-1/2}$$

(Beitrag der Strahlung kann vernachässigt werden, da nur relevant für sehr kleine a, also nur für kleinen Bruchteil der kosmischen Zeit)

- Heutiges Weltalter: setze a = 1
- Kosmologische Modelle:

  Λ = 0 (keine kosmologische Konstante)

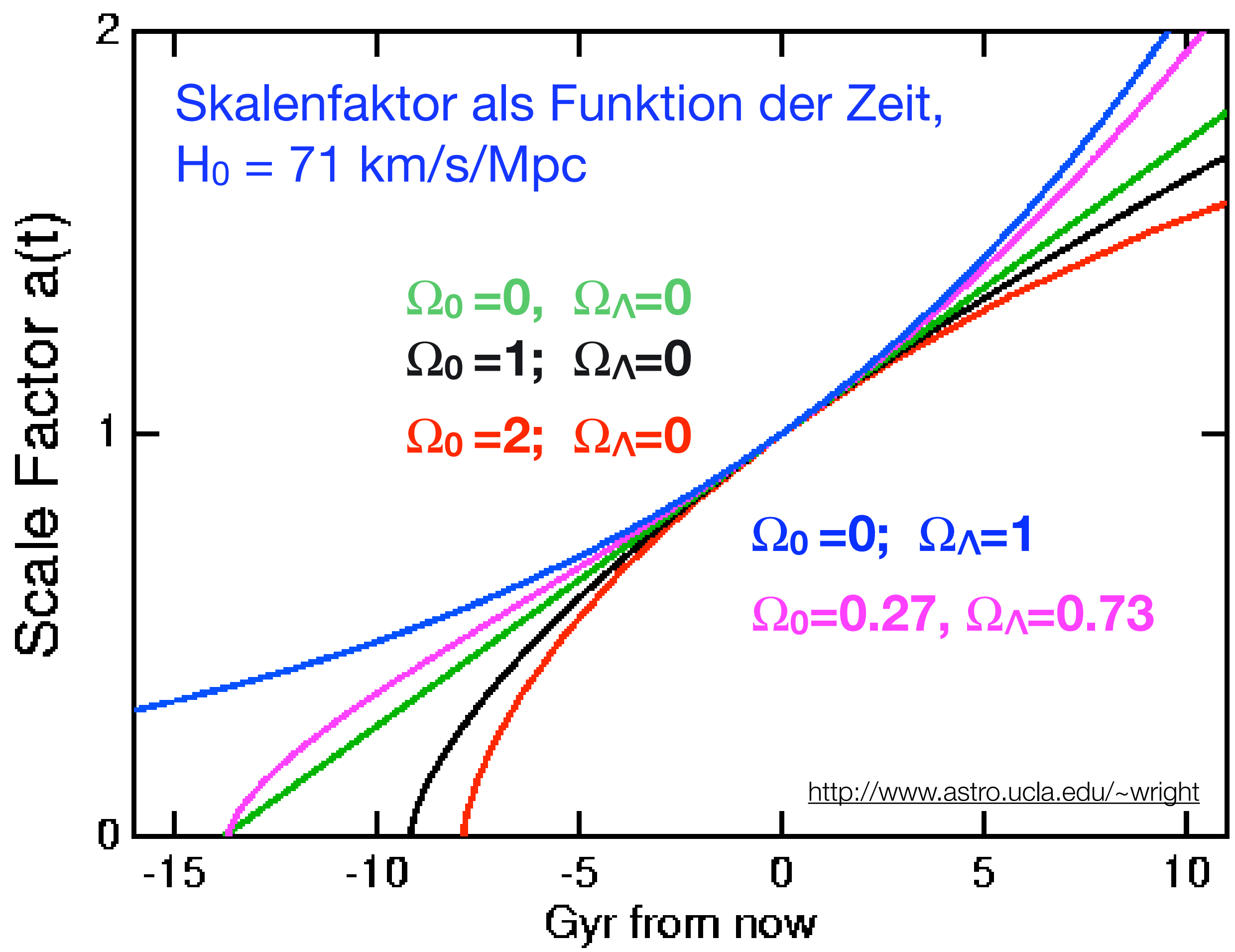
  $\Omega_\Lambda+\Omega_m$ = 1 (K = 0), werden von den inflationären Modellen bevorzugt

  Spezialfall: Einstein-de Sitter Modell: $\Omega_\Lambda=0$, $\Omega_m=1$

  => $t_0 = 2/(3H_0) \approx 6.7\ h^{-1} \times 10^9$ yr

- Aus Beobachtungen:

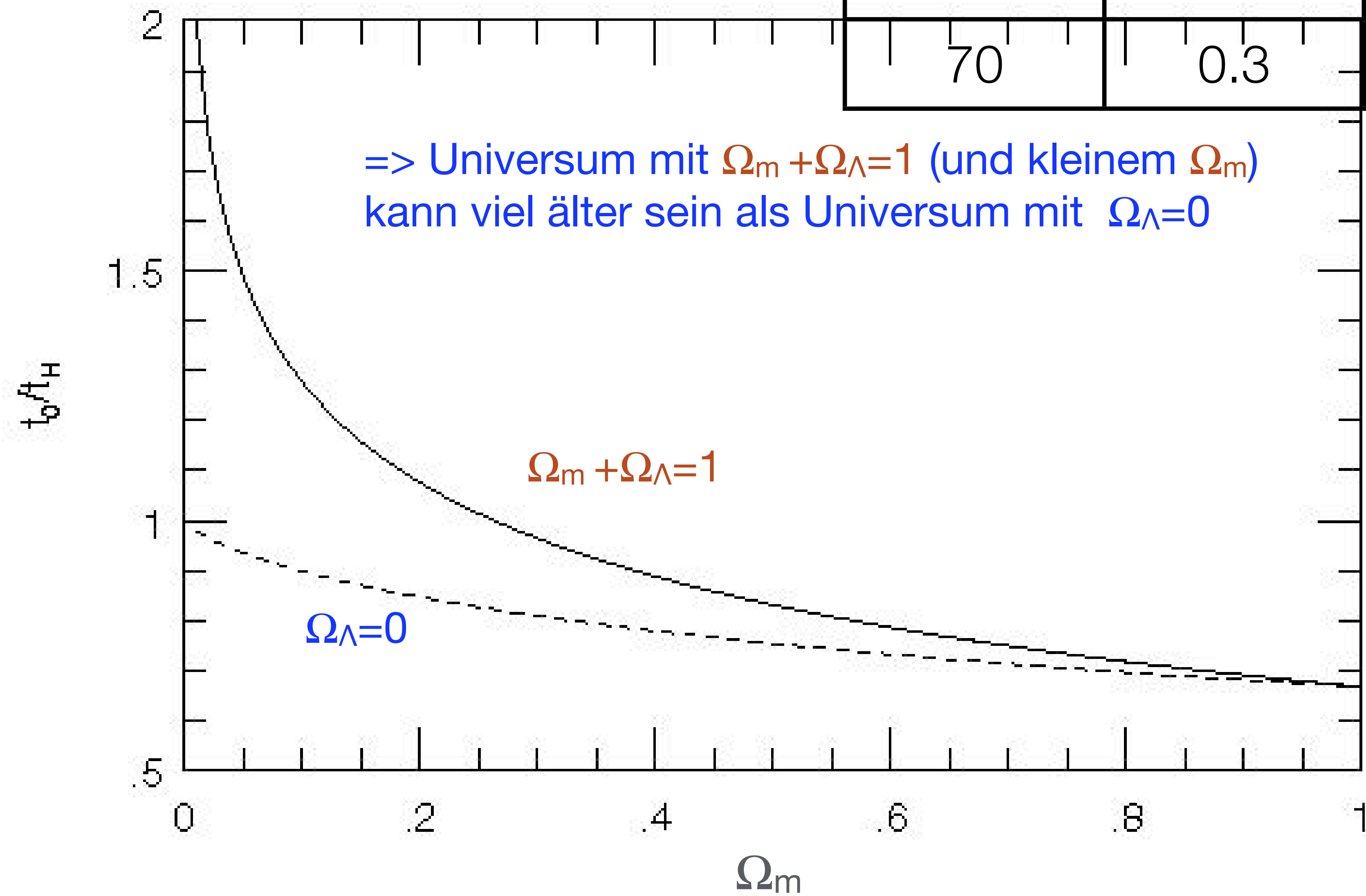
$$\Omega_m \sim 0.3, \quad \Omega_\Lambda \sim 0.7, \quad h \sim 0.7$$



Weltalter

- **Alter des Universums in Einheiten der Huble-Zeit $t_H = H_0^{-1}$ für**
  - → flache Weltmodelle (durchgezogen)
  - → Weltmodelle mit $\Omega_\Lambda=0$ (gestrichelt)

H_0	Ω_m	Ω_Λ	t_0 [Gyr]
70	5.0	0.0	6.4
70	1.0	0.0	9.7
70	0.0	0.0	14.4
70	0.3	0.7	14.1



Beispiel: Einstein-de Sitter Universum

- Dieses Modell galt noch bis vor einigen Jahren als das wahrscheinlich richtige Standardmodell für die Entwicklung des Kosmos
- In diesem Modell ist (Materiedichte = kritische Dichte)

$$\Omega_m = 1, \quad \Omega_\Lambda = 0, \quad K = 0$$

- Das Alter des Universums:

$$t = \frac{2}{3} H_0^{-1} \approx 9 Gyr$$

=> selbst für ein sehr niedriges Alter der ältesten Kugelhaufen der Milchstraße ist dieses Universum zu jung!

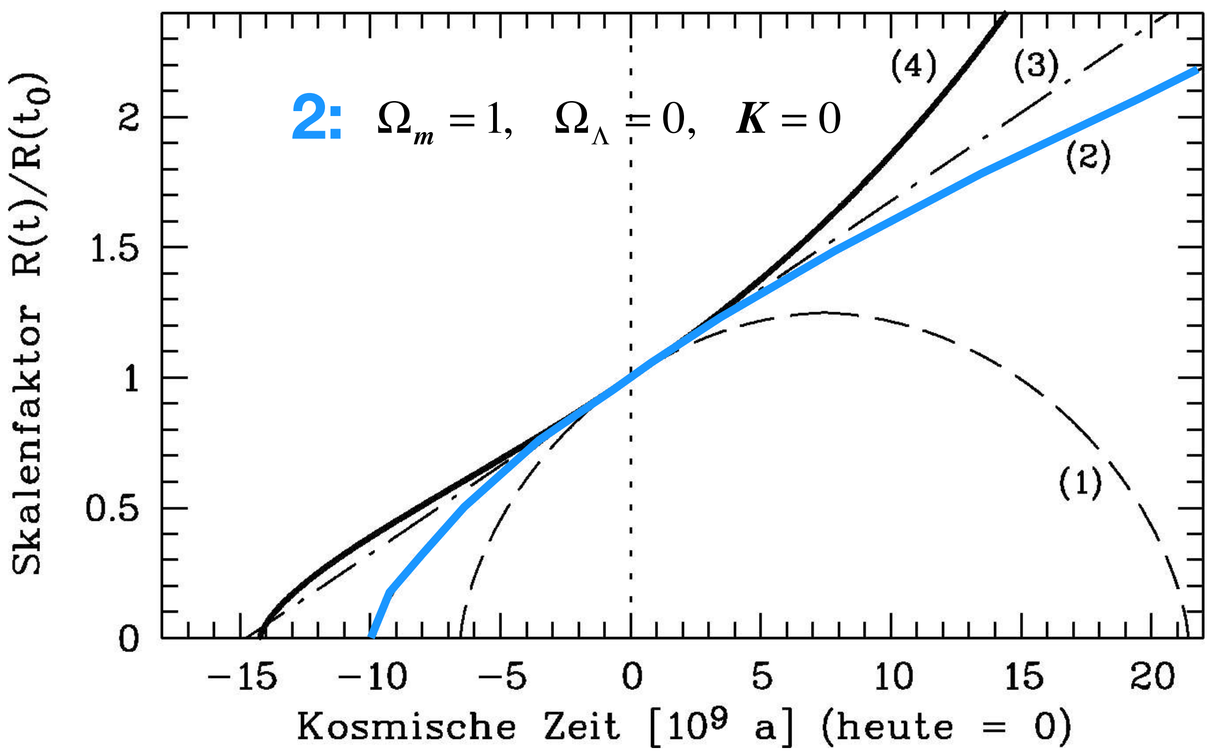
- Der Abbbremsparameter q_0:

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda = \frac{1}{2}$$

=> in Widerspruch zu der beobachteten

beschleunigten Expansion des Universums

(q negativ)

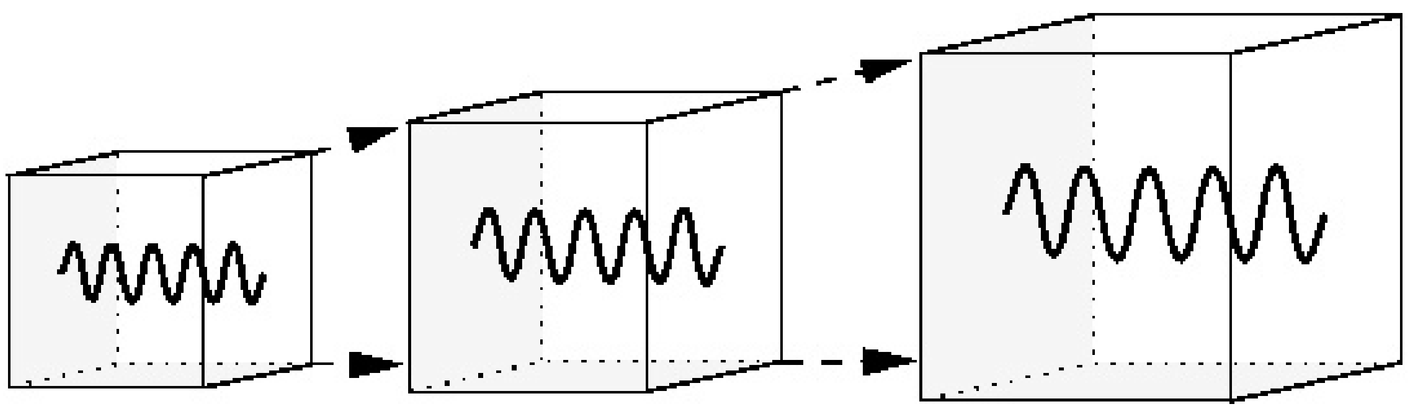


Rotverschiebung

- Frage: in welchem Zusammenhang stehen t und a(t) mit beobachtbaren Größen?
- **Antwort:** die kosmologische Rotverschiebung z ist eine einfache Funktion des Skalenfaktors:

$$1+z=\frac{1}{a}$$

- diese Relation folgt aus den Betrachtungen von Lichtstrahlen in ART; Plausibilitätsargument: die Wellenlängen des Lichts dehnen sich mit dem Universum aus



- die Beziehung zwischen Rotverschiebung und Skalenfaktor ist sehr wichtig für die Kosmologie, denn Rotverschiebung ist für die meisten entfernten Quellen die einzige Entfernungsinformation, die gemessen werden kann

Lokales Hubble Gesetz

- Für **nahe Quellen** gilt das Hubble Gesetz; aus $\Delta \mathrm{v} = H(t)\Delta r$ und $\mathrm{v} \approx zc$
- folgt:

$$z = \frac{H_0}{c} D \approx \frac{hD}{3000\,Mpc} \quad \text{für } z \ll 1$$

- mit D = Entfernung einer Quelle mit Rotverschiebung z
- dies entspricht einer Lichtlaufzeit von: $\Delta t = \dfrac{D}{c}$
- Andererseits ist aufgrund der Definition des Hubble-Parameters:

$$\Delta a = a(t_0) - a(t) = 1 - a(t) \approx H_0 \Delta t$$

- Daraus folgt:

$$D = \frac{(1-a)c}{H_0}$$

- mit der ersten Gleichung folgt dass $z = 1 - a, \quad \text{oder} \;\; a = 1 - z$
- und dies stimmt in linearer Näherung mit der vorherigen Gleichung überein, da

$$(1+z)^{-1} = 1 - z + O(z^2)$$

=> die allgemeine Relation enthält das lokale Hubble-Gesetz als Spezialfall