

Kosmologie II: Inhomogenitäten im Universum

28. Juni 2007

Laura Baudis, lbaudis@physik.rwth-aachen.de
Physikalisches Institut Ib, RWTH Aachen

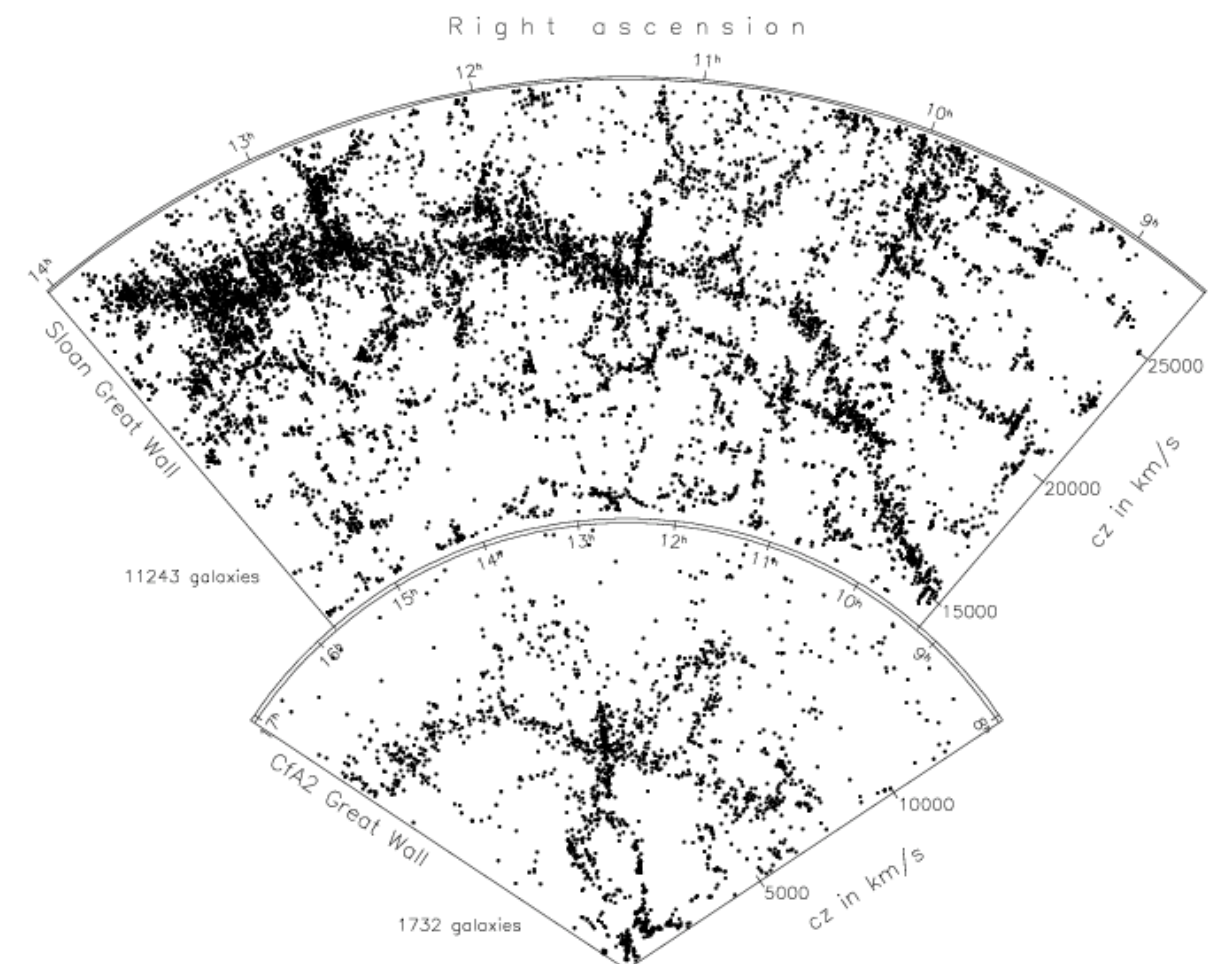
Inhalt

- Einführung
- Gravitative Instabilität
- Lineare Störungstheorie
- Beschreibung der Dichtefluktuationen
 - Korrelationsfunktion
 - Leistungsspektrum)
- Nichtlineare Strukturbildung
 - Modell des sphärischen Kollaps
 - Press-Schechter Modell
 - Numerische Simulationen (siehe nächste Vorlesung)
- Literatur:
- Schneider, Kapitel 7; Carroll, Ostlie, Kapitel 30.2; Weigert, Wendker, Wisotzki, Kapitel 13.5; Unsöld, Baschek, Kapitel 13.3

Einführung

- Die Annahme der Homogenität des Universums ist nur auf großen Skalen gerechtfertigt - auf kleinen Skalen ist das Universum inhomogen
- Die Verteilung der Galaxien am Himmel ist nicht gleichförmig, sie ballen sich zu Galaxienhaufen und Gruppen zusammen
- Auch die Haufen sind nicht gleichförmig verteilt, sondern auch korreliert, sie ballen sich zusammen zu Superhaufen

- **Es wurden noch größere Strukturen entdeckt:**
 - the Great Walls: Galaxienstrukturen mit Ausdehnung von $\sim 100h^{-1}$ Mpc
 - Voids: beinahe sphärische Gebiete, die praktisch keine (hellen) Galaxien enthalten, mit Durchmesser $\sim 50 h^{-1}$ Mpc



Einführung

- **Frage:** gibt es noch größere Strukturen im Universum, oder gibt es eine Skala derart, dass über sie gemittelt das Universum homogen erscheint?
- Es gibt zur Zeit keine Anzeichen für Strukturen auf Skalen $\geq 100 h^{-1} \text{ Mpc}$ => das Universum scheint homogen, wenn man über $R \sim 200 h^{-1} \text{ Mpc}$ mittelt

- **Vergleich:** Hubble-Radius
$$R_H \equiv \frac{c}{H_0} \approx 3000 h^{-1} \text{ Mpc}$$

dh $R \ll R_H$

oder, nach der Mittelung gibt es $\left[\frac{R_H}{R} \right]^3 \sim (15)^3 \sim 3000$ unabhängige Volumenelemente pro Hubble-Volumen
=> dies rechtfertigt die Näherung eines homogenen Weltmodells in der Behandlung der mittleren Geschichte des Universums

- **Auf kleinen Skalen ist das Universum jedoch inhomogen; Hinweise dafür:**

Galaxienverteilung, am Himmel projiziert

3-dimensionale Galaxienverteilung

Existenz von Galaxienhaufen, Beobachtung von Superhaufen, 'Great Walls' und 'Voids'

Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB) mit relativen Fluktuationen von $\Delta T/T \sim 10^{-5}$

Gravitative Instabilität: Überblick

- Kleinheit der CMB-Anisotropie ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$) legt nahe, dass die Dichteinhomogenitäten bei $z \sim 1000$ sehr klein waren
- Heute sind die Dichteinhomogenitäten wesentlich größer: zB enthält ein massiver Galaxienhaufen innerhalb eines Radius von ~ 1.5 Mpc mehr als 200 Mal so viel Masse wie eine mittlere Kugel im Universum => das Universum ist im Laufe seiner Entwicklung inhomogener geworden; wie wir sehen werden, wachsen die Dichtestörungen mit der Zeit an
- Wir definieren den **Dichtekontrast** (Überdichte rel. zur mittleren Dichte zur Zeit t)

$$\delta(\vec{r}, t) \equiv \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad \bar{\rho}(t) = \text{mittlere Materiedichte im Universum zur Zeit } t$$

$\delta \geq -1$, da $\rho \geq 0$

- Die Kleinheit der CMB Anisotropie impliziert: $|\delta| \ll 1$ bei $z \sim 1000$
- Gravitationsfeld der mittleren Massendichte $\bar{\rho}(t)$ kontrolliert die Dynamik der kosmischen Hubble-Expansion; Dichtefluktuationen $\Delta\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)$ erzeugen zusätzliches Gravitationsfeld
- Bemerkungen:

wir interessieren uns hier nur für schwache Gravitationsfelder -> die Newtonsche Beschreibung ist anwendbar

die Poissongleichung, die die Beziehung zwischen Materiedichte und Gravitationspotential angibt, ist linear, dh man kann die Effekte der homogenen Massenverteilung und der Dichtefluktuationen getrennt betrachten: das Gravitationsfeld der gesamten Materieverteilung ist die Summe des Feldes der mittleren Materieverteilung und dem der Dichtefluktuationen

Gravitative Instabilität: Überblick

- **Wir betrachten ein Gebiet, in dem $\Delta\rho>0$, also $\delta>0$:** das Gravitationsfeld ist dort stärker als im kosmischen Mittel

ein überdichtetes Gebiet erzeugt ein stärkeres Gravitationsfeld, als es der mittleren Hubble-Expansion entspricht
durch die Selbstgravitation expandiert das überdichtete Gebiet langsamer als die mittlere Hubble-Expansion
wegen verlangsamter Expansion nimmt die Dichte in diesem Gebiet langsamer ab als im kosmischen Mittel => Dichtekontrast steigt an

=> relative Dichte wächst an, erzeugt noch stärkeres Gravitationsfeld => Instabilität

- **Wir betrachten ein Gebiet, in dem $\Delta\rho<0$, also $\delta<0$:** das Gravitationsfeld ist dort schwächer als im kosmischen Mittel

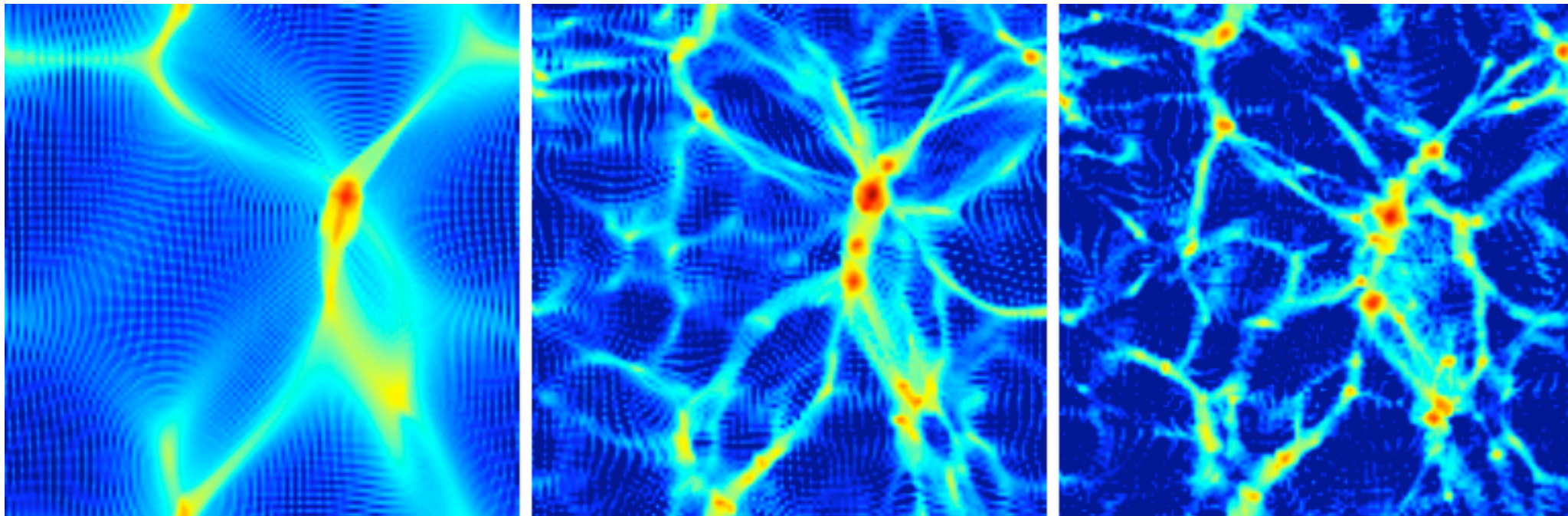
das unterdichtete Gebiet expandiert schneller als die mittlere Hubble-Expansion

die Dichte in diesem Gebiet nimmt schneller ab als im kosmischen Mittel => Dichtekontrast δ nimmt ab, δ wird negativer mit der Zeit

Dichtefluktuationen wachsen zeitlich an wegen ihrer Selbstgravitation; überdichtete Gebiete erhöhen mit der Zeit ihren Dichtekontrast, unterdichtete Gebiete verkleinern Dichtekontrast. In beiden Fällen wächst $|\delta|$ an. Dieser Effekt der gravitativen Instabilität führt daher zu einem Anwachsen der Dichtefluktuationen mit der Zeit. Die Entwicklung der Strukturen im Universum werden mit diesem Modell der gravitativen Instabilität beschrieben.

Gravitative Instabilität: Überblick

- **Im Rahmen des erwähnten Modells stellen sich die Fragen:**
 - welcher Art sind die Dichtefluktuationen bei hoher Rotverschiebung?
 - wo kommen sie her?
 - wie entwickeln sie sich mit der Zeit?
 - wie hängt die Entwicklung mit dem kosmologischen Modell zusammen?
 - kann man diese Entwicklung direkt beobachten?



<http://www-dapnia.cea.fr/>

Lineare Störungstheorie

- wir betrachten das Anwachsen von Dichtestörungen; solange die relevanten Längenskalen sehr viel kleiner als der Hubble-Radius sind, kann dieses Anwachsen mit der Newtonschen Gravitation beschrieben werden
- **Annahme:** die Materie im Universum besteht nur aus Staub, mit Dichte $\rho(\vec{r}, t)$, das Geschwindigkeitsfeld dieser 'Flüssigkeit' sei durch $\vec{v}(\vec{r}, t)$ beschrieben
- **Bewegungsgleichungen:** das Verhalten der Flüssigkeit wird durch die Kontinuitätsgleichung beschrieben

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

- diese besagt, dass Materie erhalten bleibt: die Dichte nimmt ab, wenn die Flüssigkeit ein divergentes Geschwindigkeitsfeld hat (also Teilchen 'nach außen' strömen); umgekehrt führt ein konvergentes Geschwindigkeitsfeld zur Erhöhung der Dichte. **Weiterhin gilt die Eulergleichung:**

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi$$

- **linke Seite:** die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit, die von einem Beobachter gemessen würde, der mit der Strömung schwimmt; diese wird vom Druckgradienten, und vom Gravitationsfeld Φ , welches die Poisson-Gleichung erfüllt, beeinflusst:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Lineare Störungstheorie

- Da wir nur Staub betrachten gilt: $P \equiv 0$
- Diese 3 Gleichungen können iA nicht gelöst werden, aber man kann nach einfachen Lösungen suchen; eine Lösung ist das homogen expandierende Universum. Man kann zeigen, dass

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = H(t)\vec{r}$$

- eine Lösung der Gleichungen ist, wenn ρ homogen ist, der Gleichung $\rho(t) = \rho_0 a^{-3}(t)$ genügt, und die Friedmann-Gleichung für den Skalenfaktor gilt.
- Solange $|\delta| \ll 1$, sind Abweichungen von der Hubble-Expansion klein; man erwartet daher, dass für diesen Fall Lösungen der obigen Gleichungen relevant sind, die nur wenig von der homogenen Lösung abweichen. Es ist zweckmäßig, das Problem in mitbewegten Koordinaten zu betrachten; wir definieren:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}$$

- im homogenen Universum ist \vec{x} für jedes Materie-Teilchen konstant, seine räumliche Position \vec{r} ändert sich nur aufgrund der Expansion.
- Wir schreiben das Geschwindigkeitsfeld in der Form

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} + \vec{u}\left(\frac{\vec{r}}{a}, t\right)$$

erster Term: die homogene Hubble-Expansion
zweiter Term: Abweichung davon, u ist die
Pekuliarhgeschwindigkeit

- wobei $\vec{u}(\vec{x}, t)$ eine Funktion der mitbewegten Koordinate \vec{x} ist.

Lineare Störungstheorie

- **Linearisierung.** Im homogenen Fall ist $\delta=0$ und $u=0$; wir suchen nach Lösungen, die nahe am homogenen Fall sind. Daher betrachten wir nur Terme erster Ordnung in den kleinen Parametern δ und u ; nach der Linearisierung kann man die Pekuliargeschwindigkeit u und das Gravitationspotential ϕ aus den Gleichungen eliminieren und erhält eine **Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Dichtekontrast δ** :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta$$

- die Gleichung enthält keine Ableitungen nach räumlichen Koordinaten, deshalb hat sie Lösungen der Form (räumliche und zeitliche Abhängigkeit faktorisieren):

$$\delta(\vec{x}, t) = \mathbf{D}(t) \tilde{\delta}(\vec{x})$$

- **D erfüllt die Gleichung:**

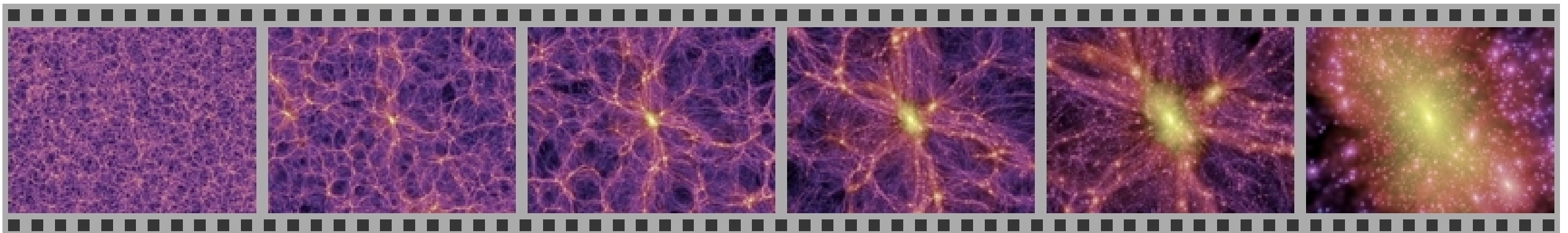
$$\ddot{\mathbf{D}} + \frac{2\dot{a}}{a} \dot{\mathbf{D}} - 4\pi G \bar{\rho}(t) \mathbf{D} = 0$$

- die zwei linear unabhängige Lösungen hat - eine davon wächst mit der Zeit an, die andere fällt ab; nach einiger Zeit wird die anwachsende Lösung dominieren, daher betrachten wir nur diese, bezeichnet als $D_+(t)$, und so normiert, dass $D_+(t_0) = 1$:

$$\delta(\vec{x}, t) = \mathbf{D}_+(t) \delta_0(\vec{x})$$

Lineare Störungstheorie

- **Bemerkungen:**
- in linearer Störungstheorie ist die räumliche Form der Dichtefluktuationen in mitbewegten Koordinaten eingefroren, nur die Amplitude wächst an; der Wachstumsfaktor $D(t)$ gehorcht einer einfachen Differentialgleichung
- $\delta_0(\mathbf{x})$ wären die Dichtefluktuationen heute, falls die Entwicklung tatsächlich linear wäre; $\delta_0(\mathbf{x})$ ist das linear extrapolierte Dichtefluktuationensfeld
- wenn $|\delta|$ von der Größenordnung 1 wird, bricht die lineare Näherung zusammen; die vorher vernachlässigten Terme sind dann nicht mehr klein und müssen berücksichtigt werden
- das Problem ist dann wesentlich schwieriger, und nicht mehr analytisch lösbar
=> numerische Simulationen



<http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/millennium/>

Dichtefluktuationen im Einstein-de Sitter Universum

- Für ein Universum mit $\Omega_0=1$, $\Omega_\Lambda=0$ kann man die Differentialgleichung für D einfach lösen. In diesem Fall ist

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \text{ oder } \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{2}{3t} \Rightarrow \bar{\rho}(t) = a^{-3} \rho_c = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

- daraus ergibt sich für die Differentialgleichung für $D(t)$:

$$\text{da } t_0 H_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \ddot{D} + \frac{4}{3t} \dot{D} - \frac{2}{3t^2} D = 0$$

- wir machen den Ansatz: $D \propto t^q$ und nach Einsetzen \Rightarrow quadratische Gleichung für q

$$q(q-1) + \frac{4}{3}q - \frac{2}{3} = 0$$

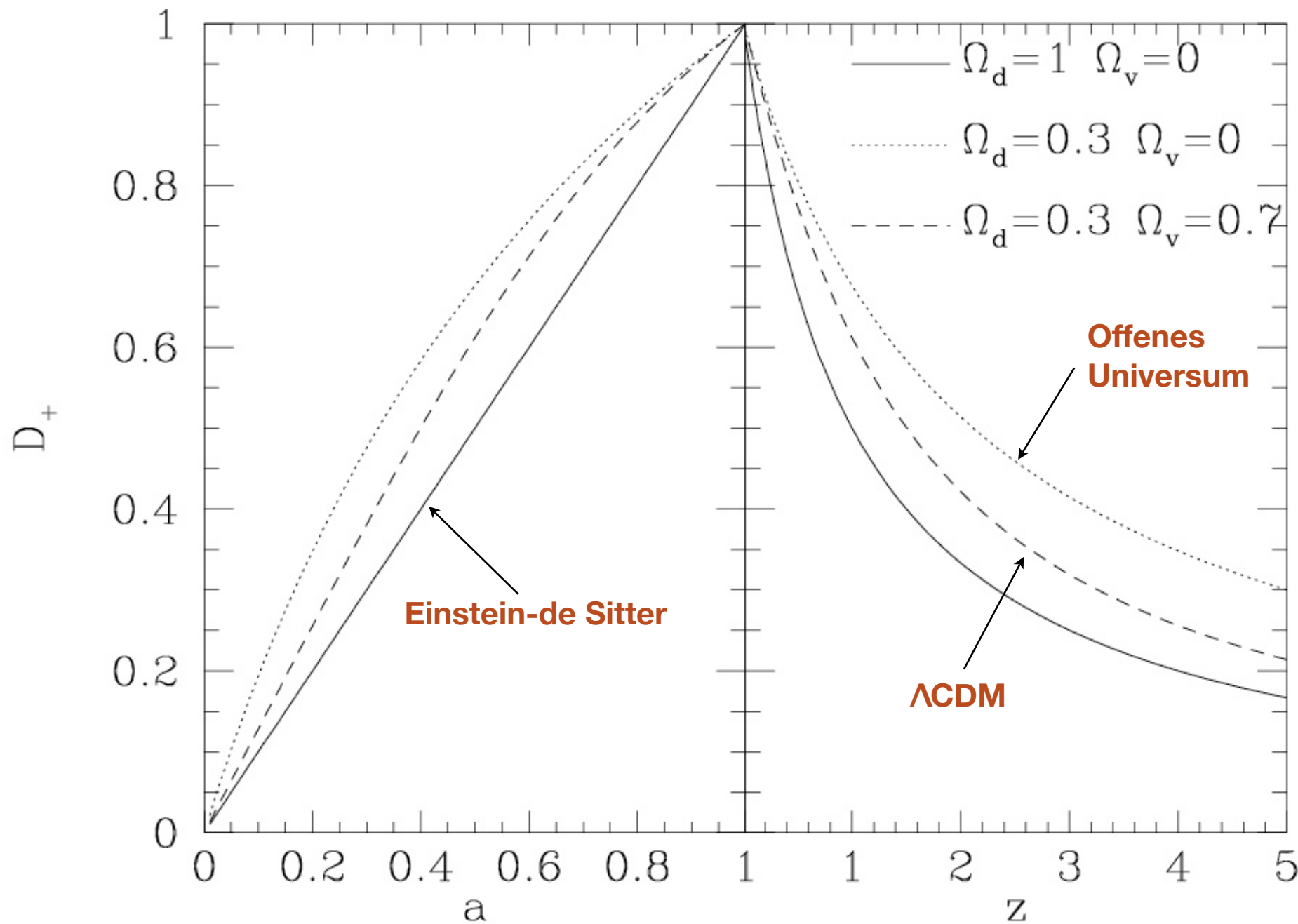
- mit den Lösungen $q = \frac{2}{3}$ und $q = -1$
- Die 2. Lösung entspricht einer zeitlich abnehmenden Funktion und wir betrachten sie nicht weiter; wir finden für das Einstein-de Sitter Universum:

$$D_+(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} = a(t) \Rightarrow \text{Wachstumsfaktor} = \text{Skalenfaktor}$$

zeitliches Anwachsen der Störungen hängt also von $a(t)$ ab!

Entwicklung in allgemeinen kosmologischen Modellen

- Qualitativ ähnliches Verhalten des Wachstumsfaktors



im Einstein-de Sitter Universum wachsen die Strukturen am langsamsten

=> aus Messung der Strukturen als Funktion von z kann das kosmologische Modell getestet werden

Beschreibung der Dichtefluktuationen

- Wie beschreibt man ein inhomogenes Universum?
 - Es kann nicht unser Ziel sein, die vollständige Funktion $\delta(\mathbf{x},t)$ für ein bestimmtes Universum zu beschreiben, sondern nur deren statistischen Eigenschaften
 - ZB: wie häufig kommen Gebiete mit $\delta > 1.67$ vor, was sind die typischen Abstände zwischen solchen Massenmaxima, oder physikalischer:
 - wie häufig sind Galaxienhaufen mit Masse $> M$, was ist der mittlere Abstand zwischen zwei Voids, etc
- => wir wollen also die statistischen Eigenschaften der Massenverteilung und ihre kosmologische Entwicklung beschreiben
- Genauso: numerische Modellrechnungen des Universums können nicht unser Universum reproduzieren, sondern bestenfalls kosmologische Modelle erzeugen, die die gleichen statistischen Eigenschaften wie unser Universum besitzen
 - Man betrachtet 2 Universen, deren Dichtefeld δ die gleichen statistischen Eigenschaften haben, als äquivalent
 - Man kann sich dann vorstellen, ein ganzes (statistisches) Ensemble von Universen zu betrachten, deren Dichtefelder alle die gleichen statistischen Eigenschaften haben

Korrelationsfunktionen

- Galaxien sind nicht zufällig verteilt, sondern befinden sich häufig in Gruppen, Haufen oder größere Strukturen => die Wahrscheinlichkeit, am Ort \mathbf{x} eine Galaxie zu finden, ist nicht unabhängig davon, eine Galaxie in der Nähe von \mathbf{x} zu finden: es ist wahrscheinlicher, eine Galaxie in der Nähe einer anderen zu finden, als an einem beliebigen Punkt. Dies wird wie folgt beschrieben:
- wir betrachten 2 Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} , und 2 Volumenelemente dV an diesen beiden Orten; sein \bar{n} die mittlere Dichte von Galaxien. Die Wahrscheinlichkeit, im Volumenelement dV um \mathbf{x} eine Galaxie zu finden, ist:

$$P_1 = \bar{n}dV$$

→ unabhängig von \mathbf{x} wenn wir annehmen, dass das Universum statistisch homogen ist.

- Die Wahrscheinlichkeit, eine Galaxie im Volumenelement dV am Ort \mathbf{x} und gleichzeitig eine Galaxie im Volumenelement dV am Ort \mathbf{y} zu finden ist:

$$P_2 = (\bar{n}dV)^2 \left[1 + \xi_g(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \right]$$

- wobei $\xi_g(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ als die **Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion** der Galaxien definiert ist.
- die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion sagt aus, ob die Galaxien mehr ($\xi > 0$) oder weniger ($\xi < 0$) konzentriert sind als im Mittel

Korrelationsfunktionen

- Da das Universum als statistisch homogen betrachtet wird folgt, dass ξ nur von der Differenz $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ abhängen kann, aber nicht von \mathbf{x} und \mathbf{y} individuell
- Da das Universum statistisch isotrop ist folgt, dass ξ nur vom Abstand $r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, nicht aber von der Richtung von $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ abhängen kann
- $\xi = \xi(r)$ ist also nur eine Funktion des Abstandes zweier Punkte
- Die Korrelationen zwischen den Galaxienpositionen im Universum werden gemessen (zB mit SDSS oder 2dFGRS); man findet für Galaxien mit Leuchtkraft $\sim L^*$ etwa die Relation:

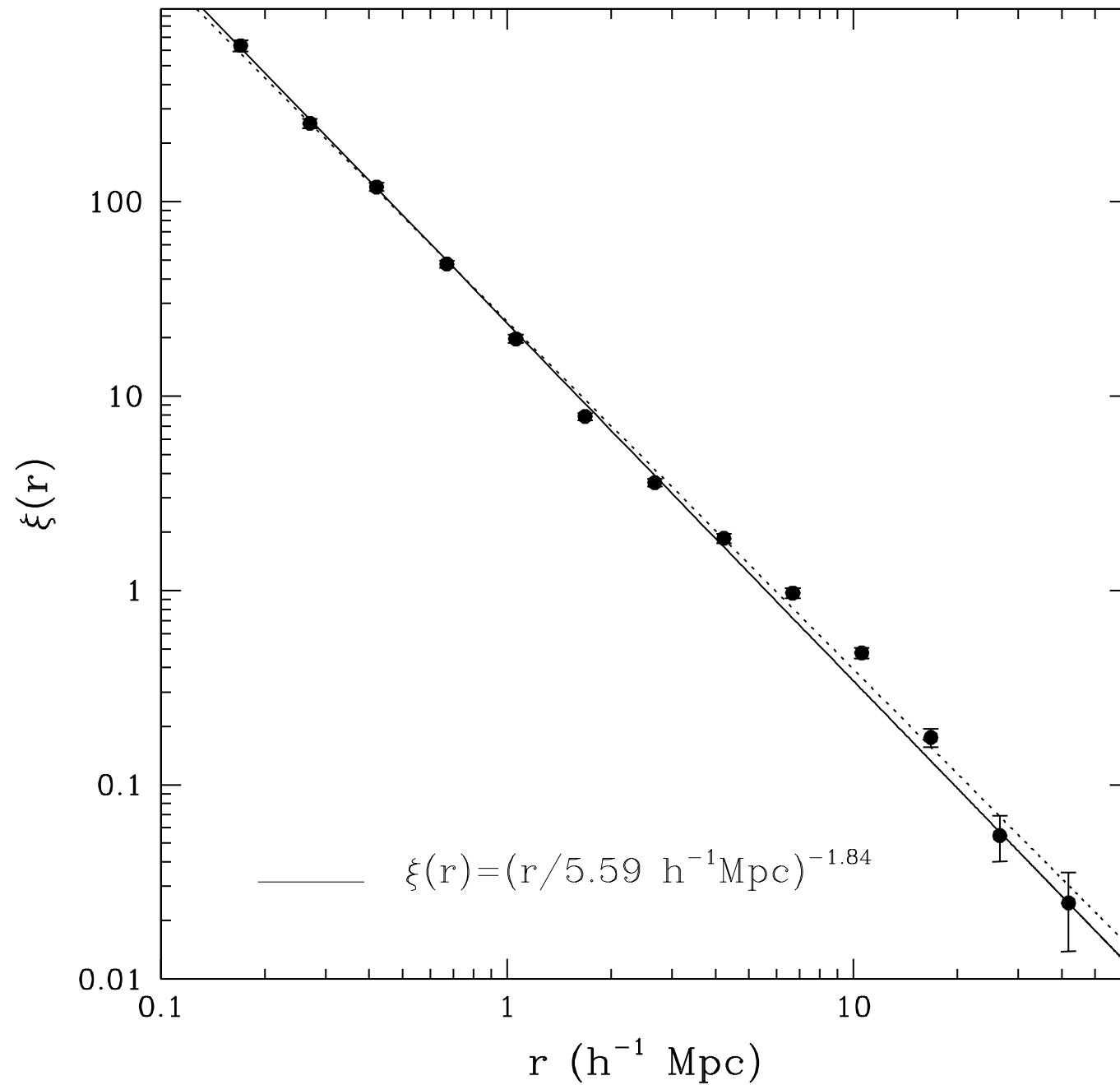
$$\xi_g(\mathbf{r}) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma}$$

- mit der Korrelationslänge $r_0 = 5h^{-1}\text{Mpc}$ und dem Exponenten $\gamma \simeq 1.8$. Die Korrelationslänge variiert mit der Leuchtkraft der Galaxien und ist im Bereich $4.7h^{-1}\text{Mpc} - 7.4h^{-1}\text{Mpc}$ (leuchtkräftigere Galaxien haben größere Korrelationslängen)
- Diese Relation ist gültig im Abstandsbereich:

$$2h^{-1}\text{Mpc} \leq r \leq 30h^{-1}\text{Mpc}$$

=> die Korrelationsfunktion ist also eine Methode, die Struktur der Verteilung der Materie im Universum zu charakterisieren

Korrelationsfunktion der Galaxien



Korrelationsfunktion für Galaxien
aus dem Sloan Digital Sky Survey

$$\xi_g(r) = \left(\frac{r}{5.59 h^{-1} \text{ Mpc}} \right)^{-1.84}$$

Das Leistungsspektrum

- Eine alternative (und äquivalente) Beschreibung der Strukturen im Universum ist das **Leistungsspektrum $P(k)$**
- vereinfacht beschreibt $P(k)$ den Grad der Struktur als Funktion der Längenskala $L \approx 1/k$
- Je größer $P(k)$, umso größer ist die Amplitude der Fluktuationen auf der Längenskala $1/k$
- Das Leistungsspektrum $P(k)$ und die Korrelationsfunktion hängen direkt miteinander zusammen; formal definiert man:

$$P(k) = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{\sin kr}{kr} \xi(r)$$

- also das Integral über die Korrelationsfunktion, mit einem von $k \sim 1/L$ abhängenden Gewichtungsfaktor
- umgekehrt kann man auch $\xi(r)$ aus $P(k)$ berechnen; $P(k)$ ist die Fourier-Transformierte von $\xi(r)$.

Entwicklung der Dichtefluktuationen

- $P(k)$ und $\xi(r)$ hängen von der kosmologischen Zeit, bzw. Rotverschiebung ab, dh man schreibt $P(k,t)$ und $\xi(r,t)$
- $P(k,t)$ ist linear in $\xi(r,t)$, und ξ hängt quadratisch von dem Dichtekontrast δ ab
- Wenn wir \mathbf{x} als den mitbewegten Abstandsvektor auffassen, so kennen wir die Zeitabhängigkeit von $\delta(\mathbf{x},t)$ aus $\delta(\mathbf{x},t)=D_+(t)\delta_0(\mathbf{x})$, daher gilt:

$$\xi(\mathbf{x},t) = D_+^2(t)\xi(\mathbf{x},t_0)$$

und

$$P(\mathbf{k},t) = D_+^2 P(\mathbf{k},t_0) \equiv D_+^2 P_0(\mathbf{k})$$

- diese Relationen sind gültig im Rahmen der Newtonschen, linearen Störungstheorie, in der Materie-dominierten Phase des Universums
- aus obiger Gleichung folgt: kennen wir $P_0(k)$ so kennen wir $P(k,t)$ für alle Zeiten (wiederum im Rahmen der linearen Störungstheorie)

Das anfängliche Leistungsspektrum

- Die Expansion des Universums zu frühen Zeiten erfolgte mittels eines Potenzgesetzes ($a(t) \propto t^{1/2}$), es gab damals keine natürliche Längenskala im Universum, so dass man erwarten muss dass zu sehr frühen Zeiten gilt:

$$P(k) \propto k^n$$

- Harrison, Zeldovich argumentieren schon vor vielen Jahren, dass aufgrund von Skalierungsrelationen $n = 1$ sein sollte => für $n = 1$ Harrison-Zeldovich Spektrum
- ZB kann man einen Zeitpunkt t_i irgendwann nach Abschluss der Inflation wählen und schreiben:

$$P(k, t_i) = D_+^2(t_i) A k$$

$A =$ Normierungskonstante, die durch Beobachtungen festgelegt werden muss

- Nimmt man die Gültigkeit von $P(k, t) = D_+^2 P(k, t_0) \equiv D_+^2 P_0(k)$ an, so würde gelten:

$$P_0(k) = A k$$

- Diese Relation muss jedoch modifiziert werden: in der linearen Störungstheorie, die zu $\delta(\vec{x}, t) = D_+(t) \delta_0(\vec{x})$ führte, haben wir die Newtonsche Dynamik angenommen, und Druckterme vernachlässigt; diese modifizieren die Entwicklung von Störungen, so dass wir einen Korrekturterm $T(k)$ einführen:

Das anfängliche Leistungsspektrum

$$P_0(k) = AkT^2(k)$$

- $T(k)$ = Transferfunktion, kann für jedes kosmologische Modell berechnet werden, wenn der Materieinhalt des Universums spezifiziert wird
- $T_2(k)$ hängt insbesondere von der Natur der dunklen Materie ab; man unterscheidet:
 - **Kalte Dunkle Materie (CDM)**: die Teilchen der dunklen Materie haben zur Zeit t_{eq} (Strahlung und Materie haben gleiche Dichte) zufällige ('thermische') Geschwindigkeiten $\ll c$
 - **Heiße Dunkle Materie (HDM)**: die Teilchen der dunklen Materie haben zur Zeit t_{eq} relativistische Geschwindigkeiten $\sim c$
- Falls die dunkle Materie aus schwach-wechselwirkenden Teilchen besteht, ist der Unterschied zwischen CDM und HDM von der Masse der Teilchen abhängig; falls die Masse der Teilchen die Relation:
$$mc^2 \gg k_B T(t_{eq}) \simeq k_B 2.73K(1 + z_{eq}) = k_B 2.73K 23900 \Omega_m h^2 \sim 6 \Omega_m h^2 eV$$
erfüllt => CDM, sonst HDM (zB Neutrinos = HDM). Im Folgenden werden wir die wichtigen Unterschiede von CDM und HDM besprechen
- Falls Dichtefluktuationen auf einer bestimmten Skala zu groß werden, gilt die obige Gleichung für $P_0(k)$ nicht mehr; trotzdem ist die Größe $P_0(k)$ nützlich zu betrachten -> lineares extrapoliertes Leistungsspektrum

Anwachsen der Dichtestörungen

- Im Rahmen der linearen Newtonschen Störungstheorie der ‘kosmischen Flüssigkeit’ gilt

$$\delta(\vec{x}, t) = D_+(t)\delta_0(\vec{x})$$

- **Modifikationen dieses Verhaltens sind aus mehreren Gründen notwendig:**

→ falls **DM aus relativistischen Teilchen besteht**, werden diese nicht im Potentialtopf einer Dichtekonzentration gebunden; sie können frei strömen, entkommen dem Potentialtopf und lösen diesen dabei auf, falls sie die Dichte dominieren; für HDM können sich deshalb keine kleinskaligen Dichtestörungen bilden

→ bei **Rotverschiebungen $z \geq z_{\text{eq}}$ dominiert die Strahlung im Universum**, daher ist das Expansionsverhalten des Universums stark von der Materie-dominierten Phase verschieden => auch die Anwachsrate der Dichtefluktuationen ändert sich

→ wie wir schon diskutiert hatten, gibt es einen **Horizont der mitbewegten Ausdehnung $r_{\text{H,com}}(\mathbf{t})$** ; physikalische Wechselwirkungen können nur auf Skalen kleiner als $r_{\text{H,com}}(\mathbf{t})$ stattfinden; die Newtonsche Störungstheorie ist sicher nicht für Fluktuationen mit Längenskala $L \sim 1/k \gtrsim r_{\text{H,com}}(\mathbf{t})$ gültig

Aus dem ersten Punkt: es muss einen klaren Unterschied zwischen Strukturbildung und Entwicklung in HDM und CDM Modellen geben; in HDM Modellen werden kleinskalige Fluktuationen durch das freie Strömen (‘free streaming’) der relativistischen Teilchen ausgewaschen => im Rahmen einer solchen Theorie bilden sich große Strukturen zuerst; Galaxien können sich erst später durch Fragmentation aus großen Strukturen bilden; dies ist in Widerspruch mit Beobachtungen, da wir Galaxien und QSOs schon bei $z \sim 5$ beobachten

=> HDM wird als dominante Komponente der dunklen Materie ausgeschlossen; und es wird allgemein angenommen, dass die dunkle Materie kalt ist

Anwachsen der Dichtestörungen

- Störungen mit einer mitbewegten Skala L sind zu sehr frühen Zeiten größer als der (mitbewegte) Horizont, erst für $z < z_{\text{enter}}(\mathbf{L})$ ist der Horizont größer als die betrachtete Skala L ; **z_{enter} ist definiert durch die Gleichung:**

$$r_{H,com}(z_{\text{enter}}(\mathbf{L})) = L$$

→ es ist diejenige Rotverschiebung, bei der der (mitbewegte) Horizont gleich der (mitbewegten) Längenskala L ist; bei $z_{\text{enter}}(\mathbf{L})$ tritt also die betrachtete Störung in den Horizont ein (eigentlich umgekehrt, der Horizont wächst über die Störung hinaus)

- Die relativistische Störungstheorie ergibt: solange $L > r_{H,com}$ wächst die Störung an:
 $\propto a^2$, solange die Strahlung dominiert (also $z > z_{\text{eq}}$) und $\propto a$, wenn die Materie dominiert (also $z < z_{\text{eq}}$)
(da frei strömende Teilchen, oder Druckgradienten das Anwachsen auf Skalen oberhalb der Horizontlänge nicht behindern können)
- Das Verhalten für $z < z_{\text{enter}}$ hängt von z_{enter} ab:
→ falls $z_{\text{eq}} \leq z \leq z_{\text{enter}}(\mathbf{L})$ kann die Fluktuation nicht anwachsen; in dieser Periode wird die Energiedichte im Universum durch Strahlung dominiert, die resultierende Expansion verhindert ein effizientes Anwachsen der Störung
→ falls $z \leq z_{\text{eq}}$ und $z \leq z_{\text{enter}}(\mathbf{L})$, also die Störungen in der Materie-dominierten Epoche in den Horizont eintreten, wachsen Störungen an wie vorher beschrieben, also $\delta \propto D_+(\mathbf{t})$

Anwachsen der Dichtestörungen

- Daraus folgt, dass es eine **ausgezeichnete Längenskala L_0** gibt, nämlich die Längenskala für die gilt:

$$z_{eq} = z_{enter}(L_0)$$

oder:

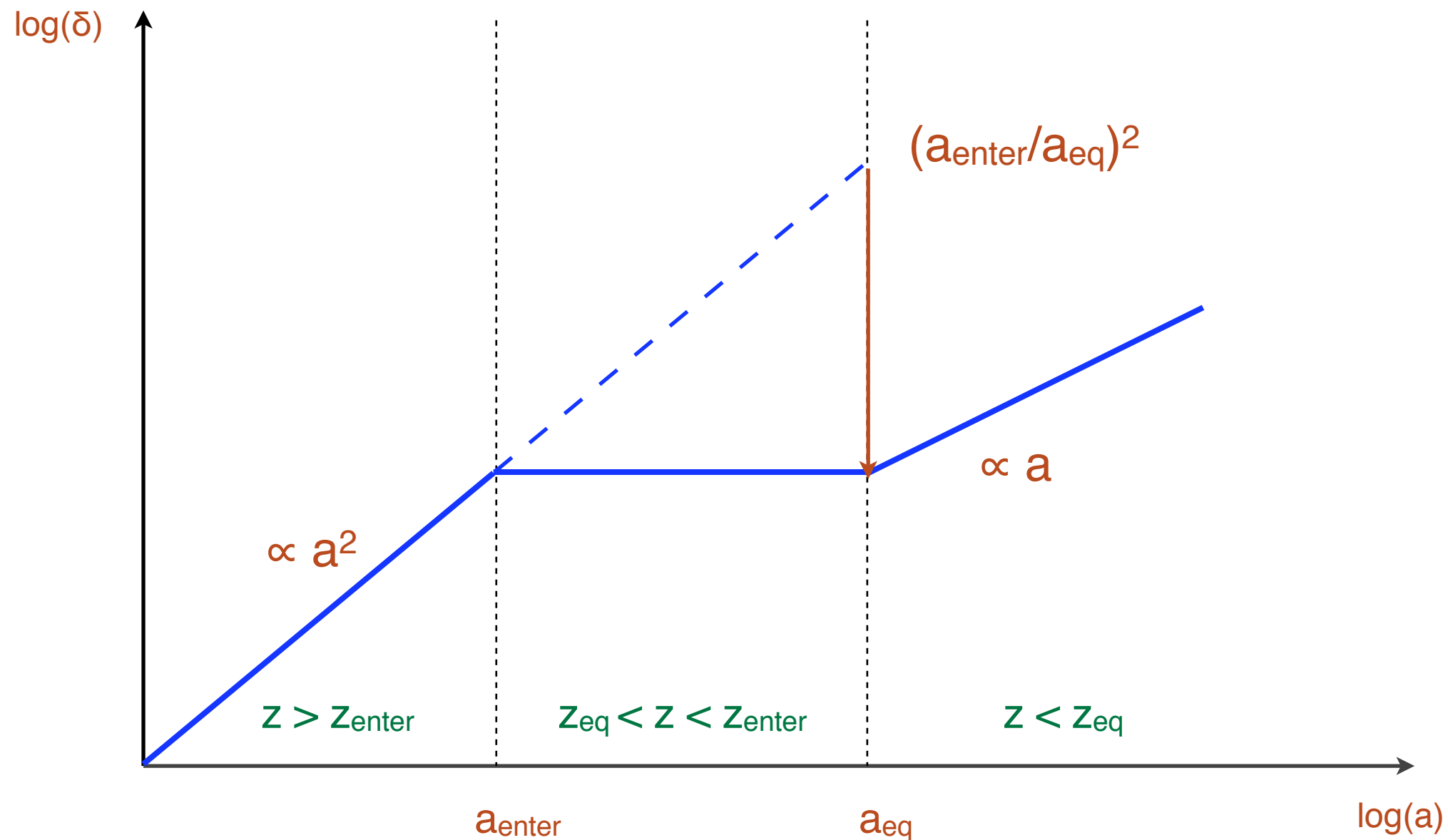
$$L_0 = r_{H,com}(z_{eq}) = \frac{c}{\sqrt{2}H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z_{eq})\Omega_m}} \approx \frac{c}{\sqrt{2}H_0} \frac{1}{\sqrt{23900\Omega_m^2 h^2}} \approx 12(\Omega_m h^2)^{-1} \text{ Mpc}$$

- wobei wir benutzt haben, dass $z_{eq} = a_{eq}^{-1} - 1 \approx 23900\Omega_m h^2$
 - Dichtefluktuationen mit $L > L_0$ treten in den Horizont ein, nachdem die Materie die Energiedichte im Universum dominiert; ihr Anwachsen wird nicht durch eine Phase der Strahlungsdominanz behindert
 - Dichtefluktuationen mit $L < L_0$ treten in den Horizont zu einem Zeitpunkt ein, wo die Strahlung dominiert, danach hören sie auf zu wachsen, bis $z < z_{eq}$ wird; ihr relatives Anwachsen bis heute ist kleiner als für Fluktuationen mit $L > L_0$
- **Die quantitative Betrachtung dieser Effekte erlaubt es, die Transferfunktion $T(k)$ zu berechnen;** iA geschieht dies numerisch, es gibt jedoch auch genaue Näherungsformeln. Zwei Grenzfälle sind analytisch lösbar:

$$T(k) \approx 1 \quad \text{für} \quad k \ll \frac{1}{L_0}$$

$$T(k) \approx (kL_0)^{-2} \quad \text{für} \quad k \gg \frac{1}{L_0}$$

Anwachsen der Dichtestörungen



eine Dichtestörung, die in der strahlungsdominierten Epoche des Universums in den Horizont eintritt, kann danach so lange nicht weiter anwachsen, bis die Materie den Energieinhalt dominiert. Im Vergleich zu einer Störung, die erst in der materiedominierten Epoche in den Horizont eintritt, ist daher die Amplitude um einen Faktor $(a_{\text{eq}}/a_{\text{enter}})^2$ unterdrückt

Anwachsen der Dichtestörungen

- Im Rahmen des CDM Modells kann die Transferfunktion, und damit auch das Leistungsspektrum der Dichtefluktuationen als Funktion der Längenskala und der Rotverschiebung berechnet werden. Die Amplitude jedoch muss aus den Beobachtungen ermittelt werden
- **Einige Bemerkungen:**
 - die Transferfunktion hängt von der Kombination kL_0 , also von $k(\Omega_m h^2)^{-1}$ ab. Da mittels z bestimmte Entfernungen in Einheiten von h^{-1} Mpc gemessen werden, hängt die Form der Transferfunktion, also auch das Leistungsspektrum von $\Gamma = \Omega_m h$ ab; **Γ wird als Formparameter** ('shape parameter') des Leistungsspektrums bezeichnet, und wird manchmal als freien Parameter benutzt
 - falls die Galaxienverteilung der dunklen Materie folgt, kann man aus ihr die Korrelationsfunktion, bzw. das Leistungsspektrum bestimmen; sowohl aus der an der Sphäre projizierten Verteilung der Galaxien (Winkelkorrelationsfunktion), als auch aus der 3-D Verteilung (aus 'redshift surveys') findet man **$\Gamma \sim 0.2 - 0.25$**
 - Γ hängt auch von Ω_b ab; da jedoch $\Omega_b \leq 0.04$ (aus der primordialen Nukleosynthese), ist dieser Einfluss gering
 - aus $T(k) \approx k$ für $kL_0 \ll 1$ folgt, dass **$\mathbf{P(k)} \propto \mathbf{k}$ für $\mathbf{kL_0} \ll \mathbf{1}$** → dieses Verhalten ist mit den CMB Anisotropiemessungen von COBE auf großen Skalen verträglich (mehr dazu in der nächsten Vorlesung)

Anwachsen der Dichtestörungen

- **weitere Bemerkungen:**

→ neben CDM und HDM Modellen gibt es auch solche, die von CDM dominiert sind, jedoch einen Beitrag von HDM haben: **MDM (mixed dark matter models)**. Wir wissen mittlerweile, dass zumindest eine ν -Sorte eine Masse $\lesssim 1$ eV besitzt, dies impliziert $\Omega_\nu \ll 1$; dadurch wird $T(k)$ etwas verändert, so dass kleine Skalen (große k) etwas unterdrückt werden

→ die Entwicklung der Dichtefluktuationen der Baryonen ist verschieden von der CDM Entwicklung; obwohl für $z < z_{\text{eq}}$ die Materie dominiert, ist die Dichte der Baryonen danach immer noch kleiner als die der Strahlung (bis zur Rekombination); da Photonen und Baryonen miteinander wechselwirken, und die Strahlung nicht in die Potentialtöpfe der dunklen Materie hineinfallen kann, werden Baryonen auch daran gehindert - die Dichteverteilung der Baryonen ist also sehr viel glatter als die der dunklen Materie

→ erst nach der Rekombination fällt die Wechselwirkung mit den Photonen weg, Baryonen können dann in die Potentialtöpfe der dunklen Materie fallen, dh danach wird die Verteilung von dunkle Materie und Baryonen ähnlich

→ die lineare Theorie der Entwicklung von Dichtefluktuationen bricht spätestens dann zusammen, wenn $|\delta| \sim 1$; deshalb gelten die Gleichungen für das Leistungsspektrum $P(k,t)$ nur dann, wenn die entsprechenden Fluktuationen klein sind

Das Leistungsspektrum der Dichtefluktuationen

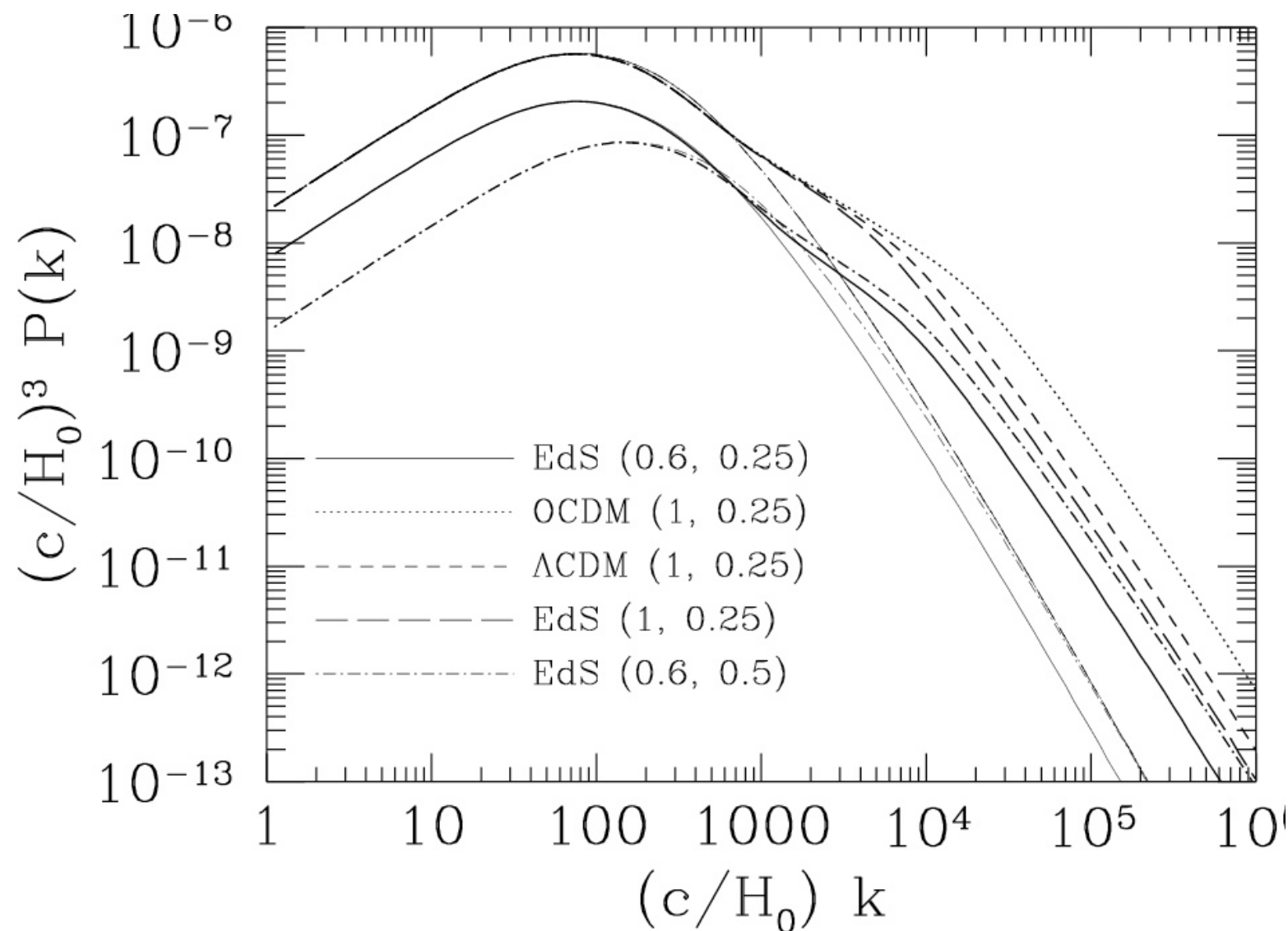
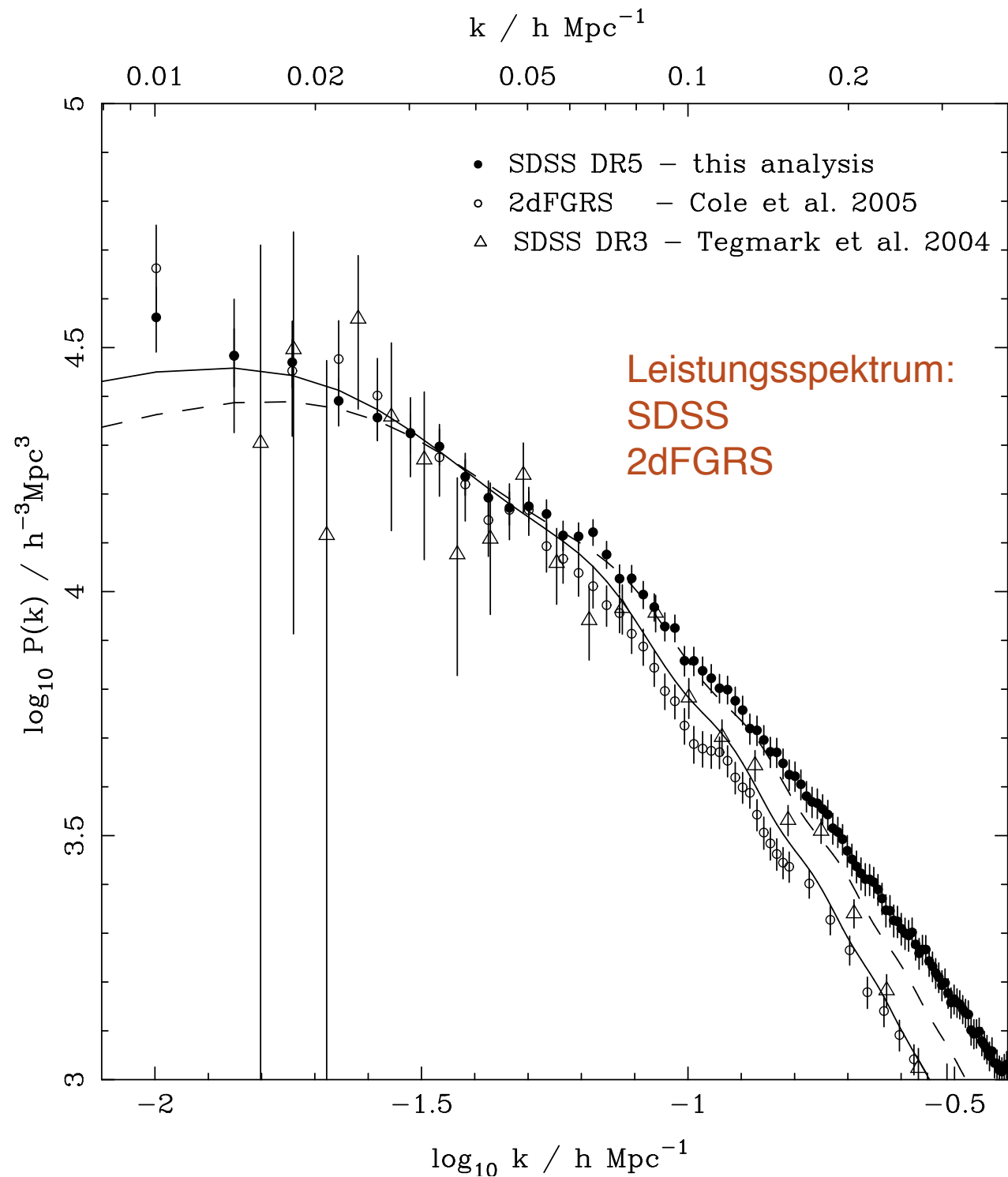


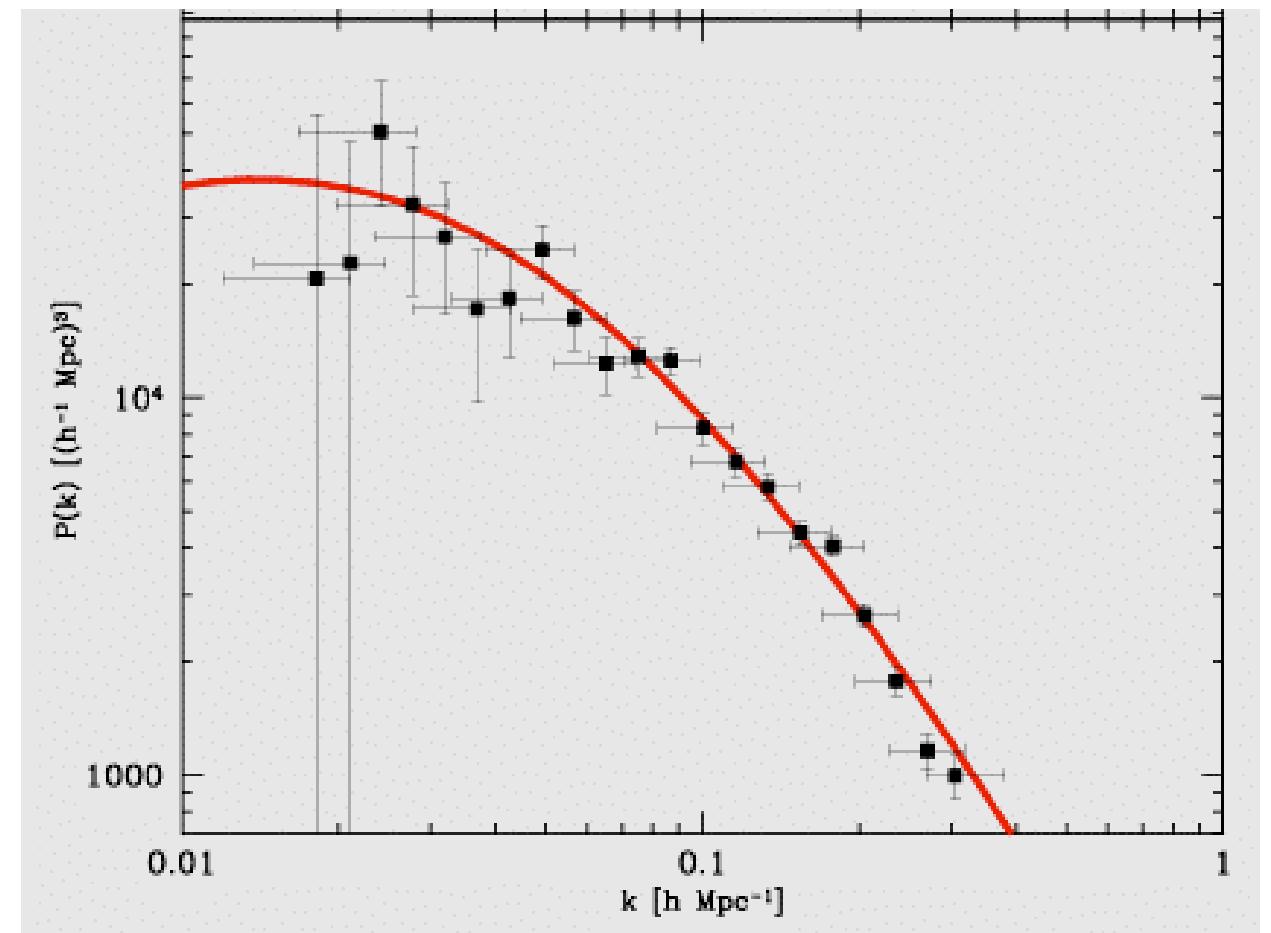
Abbildung 7.5: Das Leistungsspektrum der Dichtefluktuationen für CDM Modelle. Wellenvektor k ist in Einheiten von H_0/c gegeben, und $(c/H_0)^3 P(k)$ ist dimensionslos. Die verschiedenen Kurven unterscheiden sich in den kosmologischen Parametern: EdS hat $\Omega_0 = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$; OCDM hat $\Omega_0 = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0$; Λ CDM hat $\Omega_0 = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$; die Zahlen in den Klammern bedeuten (σ_8, Γ) , wobei σ_8 die noch später zu besprechende Normierung des Leistungsspektrums angibt, und Γ ist der Formparameter. Die dünnen Kurven entsprechen dem linear nach heute extrapolierten Leistungsspektrum $P_0(k)$, während die dicken Kurven die nichtlineare Entwicklung berücksichtigt

Peter Schneider

Das Leistungsspektrum der Dichtefluktuationen



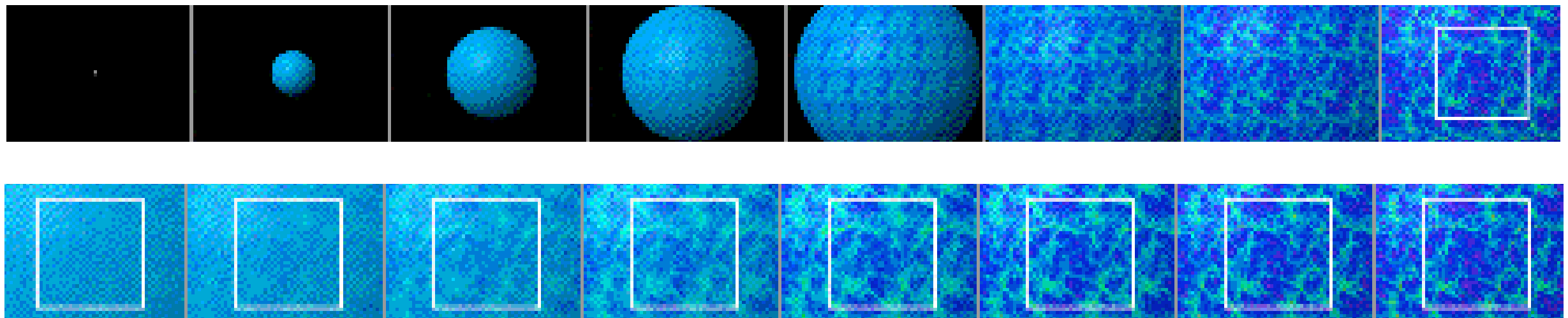
arXiv:astro-ph/0608636v2



A. Melchiori

Nichtlineare Strukturbildung

- Die lineare Störungstheorie ist nur begrenzt anwendbar, die Entwicklung von Strukturen wie zB Galaxienhaufen ist damit nicht erfassbar
- Es existieren analytische Beschreibungen, die die nichtlineare Evolution der Massenverteilung im Universum in Grenzfällen wiedergeben, wir werden solch ein spezielles Modell betrachten (Modell des sphärischen Kollaps)
- iA jedoch wird die nichtlineare Strukturentwicklung mit numerischen Methoden studiert; einige Aspekte der numerischen Simulationen werden wir hier diskutieren



Modell des sphärischen Kollaps

- Wir betrachten ein sphärisches Gebiet innerhalb eines expandierenden Universums. Die Dichte $\rho(t)$ dieses Gebiets soll gegenüber der mittleren kosmischen Dichte $\bar{\rho}(t)$ erhöht sein:

$$\rho(t) = [1 + \delta(t)] \bar{\rho}(t)$$

wobei der Dichtekontrast wie vorher definiert ist $\delta(\vec{r}, t) \equiv \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}$

- Für kleine t sei die Dichtestörung klein, so dass sie zunächst linear anwächst:

$$\delta(t) \propto D_+(t), \text{ solange } \delta \ll 1$$

- Wir betrachten frühen Zeitpunkt t_i , so dass

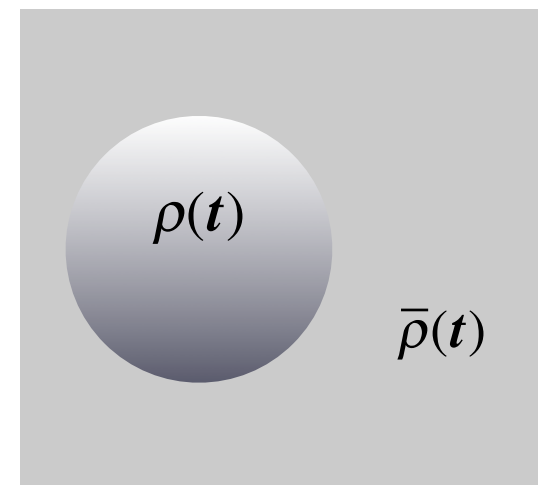
$$\delta(t_i) \ll 1; \delta(t_i) = D_+(t_i) \delta_0$$

wobei δ_0 der linear nach heute extrapolierte Dichtekontrast ist ($\delta_0 \neq \delta(t_0)$, da $\delta(t_0)$ durch nichtlineare Entwicklung beeinflusst ist!)

- sei R_{com} der anfängliche mitbewegte Radius der überdichten Kugel; solange $\delta \ll 1$ ändert sich der mitbewegte Radius nur wenig; die Masse der Kugel ist:

$$M = \frac{4\pi}{3} R_{com}^3 \rho_0 (1 + \delta_i) \approx \frac{4\pi}{3} R_{com}^3 \rho_0$$

- da physikalischer Radius $R = aR_{com}$ und $\bar{\rho} = \frac{\rho_0}{a^3}$



Modell des sphärischen Kollaps

- Dies bedeutet: es gibt eine eindeutige Relation zwischen mitbewegtem Radius und Masse dieser Kugel, unabhängig von der Wahl von t_i und von δ_0 , solange nur gewählt wird:

$$\delta(t_i) = D_+(t_i)\delta_0 \ll 1$$

- Wegen erhöhter Gravitation wird die Kugel etwas langsamer als das Universum als Ganzes expandieren \rightarrow dies führt zu einer Erhöhung des Dichtekontrasts, was wiederum die die Expansionsrate relativ zur kosmischen Expansionsrate verlangsamt
- Die Bewegungsgleichungen für den Radius der Kugel sind identisch mit den Friedmann-Gleichungen für die kosmische Expansion, nur dass die Kugel ein anderes effektives Ω_m als der Rest des Universums hat
- Falls $\delta(t_i)$ genügend groß, kommt die Expansion zum Stillstand, dh $R(t)$ erreicht ein Maximum, danach rekollabiert die Kugel wieder; seit t_{\max} = Zeitpunkt der maximalen Expansion; die Kugel fällt zum Zeitpunkt $t_{\text{coll}} = 2 \cdot t_{\max}$ (aus Zeitsymmetrie der Bewegungsgleichungen) auf einen Punkt zusammen (theoretisch!)
- Die Frage, ob die Expansion der Kugel zum Stillstand kommt, hängt vom Dichtekontrast $\delta(t_i)$ bzw δ_0 , und vom kosmischen Hintergrundmodell ab

‘Violent Relaxation’ und viriales Gleichgewicht

- Natürlich fällt die Kugel nicht wirklich auf einen Punkt zusammen (dies wäre nur der Fall, falls die Kugel perfekt homogen und die Teilchen der Kugel perfekte radiale Bewegung ausführen würden). Innerhalb einer solchen Kugel wird es kleinskalige Dichte- und gravitative Fluktuationen geben, diese führen zur Abweichung der Teilchenbahnen von perfekten radialen Orbits. Dieser Effekt wird umso wichtiger, je größer die Dichte der Kugel wird.
- Die Teilchen ‘streuen’ an diesen Fluktuationen des Gravitationsfeldes und virialisieren: dieser Prozess heißt ‘violent relaxation’ und findet auf kleinen Zeitskalen statt (\sim dynamische Zeitskala = Zeit, die die Teilchen brauchen, um die Kugel einmal zu durchqueren). Die Virialisierung ist zum Zeitpunkt t_{coll} praktisch abgeschlossen.

- Zu diesem Zeitpunkt (t_{coll}) befindet sich die Kugel also im virialen Gleichgewicht, ihre mittlere Dichte beträgt:

$$\langle \rho \rangle = (1 + \delta_{\text{vir}}) \bar{\rho}(t_{\text{coll}}) \quad \text{wobei} \quad (1 + \delta_{\text{vir}}) \approx 178 \Omega_m^{-0.6}$$

- dies ist der Grund, weshalb man bei einem Galaxienhaufen sagt, dass der virialisierte Gebiet des Haufens eine Kugel ist, deren mittlere Dichte ~ 200 mal der kritischen Dichte ρ_c des Universums zum Zeitpunkt des Kollaps ist
- Das sphärische Kollapsmodell ist ein einfaches Modell für die nichtlineare Entwicklung einer Dichtestörung im Universum; auch wenn sehr stark vereinfacht, gibt es wesentliche Züge des gravitativen Kollaps wieder, wie sie in numerischen Simulationen gefunden werden

Anzahldichte von Halos dunkler Materie

- Das Modell des sphärischen Kollaps erlaubt eine näherungsweise Berechnung der Anzahldichte von Halos dunkler Materie in Abhängigkeit von deren Masse und Rotverschiebung; dieses Modell wird **Press-Schechter Theorie** genannt
- Wir betrachten ein Dichtefluktuationenfeld $\delta_0(\vec{x})$, welches Fluktuationen auf allen Skalen aufweist, entsprechend dem Leistungsspektrum $\mathbf{P}_0(\mathbf{k})$
- Angenommen, wir glätten dieses Feld, mit einer mitbewegten Glättungslänge R ; sei $\delta_R(\vec{x})$ das so geglättete, linear nach heute extrapolierte Dichtefluktuationenfeld; es weist keine Fluktuationen auf Skalen $\leq R$ auf
- Jedes Maximum von $\delta_R(\vec{x})$ entspricht einem Peak mit charakteristischer Skala $\geq R$; zu diesem Peak gehört ein Massenpeak der Masse $\mathbf{M} \sim (4\pi R^3/3)\rho_0$
- Falls die Amplitude δ_R des Peaks groß genug ist, wird eine Kugel mit einem mitbewegtem Radius R um den Peak vom linearen Wachstum der Dichtefluktuationen abkoppeln, nichtlinear anwachsen, ihre Expansion wird zum Stillstand kommen, und danach wird sie rekollabieren. Dieser Prozess findet in ähnlicher Weise wie im sphärischen Kollaps Modell statt, und wird durch diesen angenähert
- Der zum Kollaps notwendige Dichtekontrast $\delta_R \geq \delta_{\min}$ läßt sich für jedes kosmologische Modell berechnen; falls die statistischen Eigenschaften von $\delta_0(\vec{x})$ gaussförmig sind, kann man die Anzahldichte von Massenpeaks mit $\delta_R \geq \delta_{\min}$ berechnen und daher die Anzahldichte $\mathbf{n}(\mathbf{M}, \mathbf{z})$ von relaxierten Halos dunkler Materie im Universum als Funktion der Masse M und der Rotverschiebung z bestimmen

Das Press-Schechter Modell

- **Die wichtigsten Vorhersagen des Press-Schechter Modells sind:**
- **je größer M , umso kleiner ist $n(M,z)$** ; dies folgt sofort aus der vorherigen Betrachtung: zu größerem M gehört eine größere Glättungslänge R ; die Anzahl der Maxima mit fester Amplitude δ_{\min} nimmt mit größerer Glättungslänge ab
- **die Anzahldichte von Halos mit Masse M hängt von der Amplitude der Dichtefluktuation δ_0 ab** - dh von der Normierung des Leistungsspektrums $P_0(k)$ -> daher kann die Normierung von $P_0(k)$ durch Vergleich der Vorhersage der Press-Schechter Theorie mit der beobachteten Anzahldichte von Galaxienhaufen festgelegt werden ("Haufennormierung des Spektrums").
- **$n(M,z)$ fällt für große M exponentiell ab**; genügend hohe Peaks werden bei großer Glättungslänge sehr selten -> es gibt sehr wenige Haufen mit Massen $M \geq 3 \times 10^{15} M_{\odot}$
- **der notwendige Dichtekontrast δ_{\min} für einen Kollaps vor der Rotverschiebung z ist eine Funktion von z** ; für das Einstein-de Sitter Universum ($\Omega_m=1$; $\Omega_{\Lambda}=0$) berechnet man $\delta_{\min} \approx 1.69(1+z)$; im Allgemeinen ist $\delta_{\min} \approx \delta_c/D_+(z)$, wobei δ_c und $D_+(z)$ vom kosmologischen Modell abhängen

=> die Rotverschiebungsabhängigkeit von δ_{\min} ist vom kosmologischen Modell abhängig, im Wesentlichen durch den Wachstumsfaktor $D_+(z)$

=> da $D_+(z)$ bei festem z größer für kleinere Ω_m ist ($D_+(0) = 1$ laut Definition), ist das Verhältnis der Anzahldichte von Halos bei Rotverschiebung z zu der heutigen Anzahldichte $n(M,z)/n(M,0)$ umso größer, je kleiner Ω_m ist

Das Press-Schechter Modell

- Für Haufenmassen ($M \sim 10^{15} M_{\odot}$) ist die Entwicklung dieses Verhältnisses im Einstein-de Sitter Modell dramatisch, während sie in offenen, und in flachen, Λ -dominierten Modellen weniger stark ausfällt
 - => durch Vergleich der Anzahldichte von Galaxienhaufen bei hohem z mit der heutigen Anzahldichte kann man Ω_m und auch Ω_{Λ} einschränken
 - => schon wenige sehr massive Haufen bei $z \geq 0.5$ reichen aus, um das Einstein-de Sitter Modell auszuschliessen
- Probleme der Methode: eine ausreichende genaue Massenbestimmung von entfernten Haufen und die Festlegung, ob diese relaxiert sind und daher von der Press-Schechter Theorie berücksichtigt werden
- Press-Schechter Modell: sehr einfach, jedoch in sehr guter Übereinstimmung mit aus den numerischen Simulationen erhaltenen Anzahldichten von Halos
- Leichte Modifikationen von $n(M,z)$ ergeben extrem gute Beschreibung der Resultate von numerischen Simulationen

Das Press-Schechter Modell

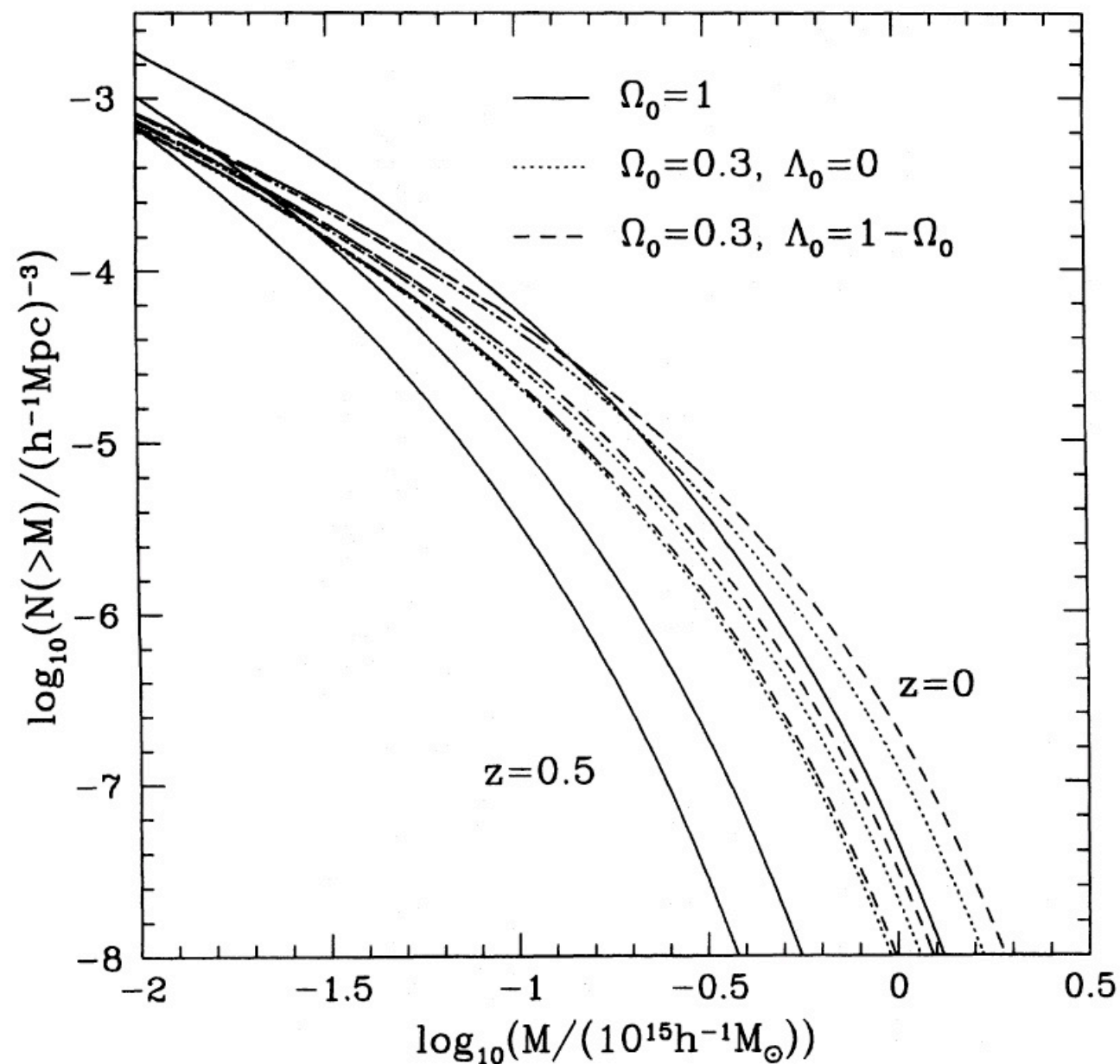


Abbildung 7.6: Aus der Press-Schechter-Theorie berechnete Anzahldichte von Halos Dunkler Materie mit Masse $> M$. Die mitbewegte Anzahldichte der Halos ist für drei verschiedene Rotverschiebungen gezeigt, $z = 0$ (jeweils obere Kurven), $z = 0.33$ und $z = 0.5$ (jeweils untere Kurven), für drei verschiedene kosmologische Modelle. Die Normierung des Dichtefluktuationfeldes wurde so gewählt, dass Anzahldichte mit $M > 10^{14}h^{-1}M_{\odot}$ mit der lokalen Anzahldichte von Galaxienhaufen übereinstimmt in allen Modellen. Zu beachten ist die dramatische z -Entwicklung im EdS Modell (aus Eke et al. 1996, MNRAS 282, 263)

Peter Schneider

Das Press-Schechter Modell

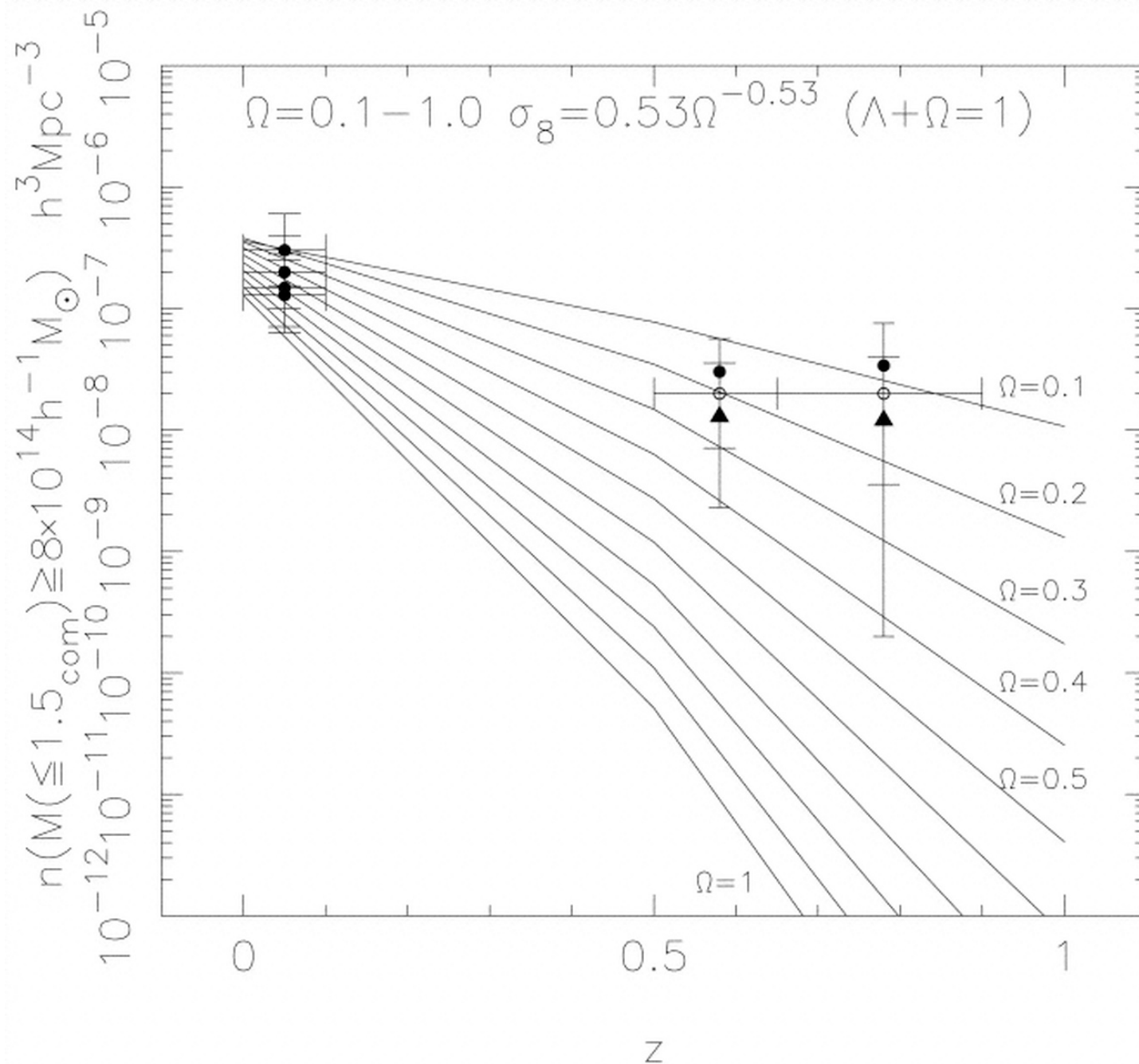


Abbildung 7.7: Erwartete (mitbewegte) Anzahl-dichte von Galaxienhaufen mit Masse $> 8 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ innerhalb eines (mitbewegten) Radius von $R < 1.5 h^{-1} \text{Mpc}$, für flache kosmologische Modelle und verschiedene Werte des Dichteparameters. Normierung der Modelle so, dass sie heutige Haufendichte in etwa richtig wiedergeben. Die eingezeichneten Punkte stammen aus Beobachtungen von Galaxienhaufen verschiedener Rotverschiebung – obgleich die Fehlerbalken bei hoher Rotverschiebung sehr groß sind, scheint ein Universum hoher Dichte ausgeschlossen zu sein (aus Bahcall & Fan 1998, ApJ 504, 1)

Peter Schneider