

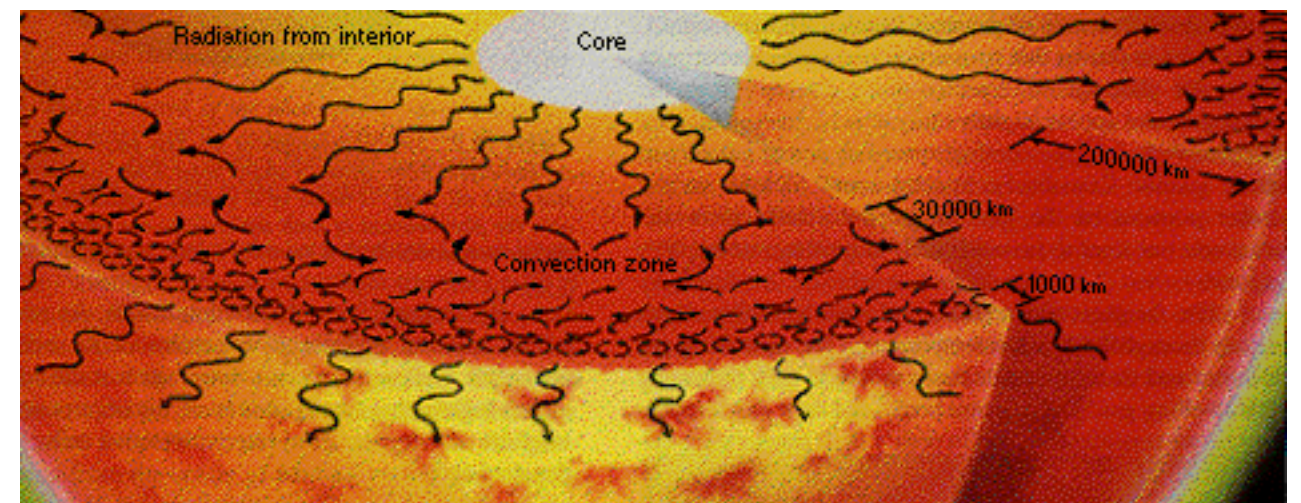
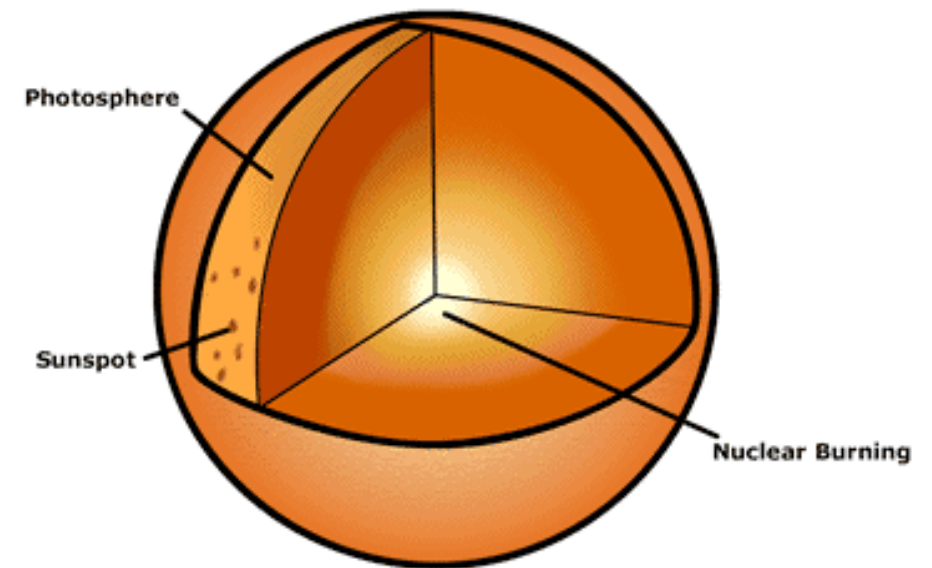
Sterne III: Innerer Aufbau; Sonnenneutrinos

30 November, 2006

Laura Baudis, lbaudis@physik.rwth-aachen.de
Physikalisches Institut Ib, RWTH Aachen

Inhalt

- Strukturgleichungen des Sternaufbaus
- Energiequellen von Sternen
- Energietransport
- Sternmodelle; die Hauptreihe
- Nukleare Energieerzeugung in Sternen
- Solare Neutrinos



- Literatur:
- Carroll, Ostlie, Kapitel 10; Weigert, Wendker, Wisotzki, Kapitel 7, Unsöld, Baschek, Kapitel 8

Innere Struktur der Sterne

- **Ziel:** Verständnis der inneren Sternstruktur, der Gleichgewichtskonfigurationen, des nuklearen Brennens, des Energietransports und der Sternentwicklung.

- **Annahmen:**

Sterne: sphärisch symmetrische Gaskugeln (nur Radius r als Koordinate)

keine Rotation, keine globalen Magnetfelder

- **Bestimme:**

$$M(r), \rho(r), P(r), T(r), L(r)$$

- **Aus:**

Set von Differentialgleichungen (allg. physikalische Prinzipien)

+ Materialgleichungen (Annahmen über das Verhalten der Materie)

+ Randbedingungen (bei $r=0$, $r=R$)

- **Überprüfung:** Vergleich mit empirischen Relationen wie Masse-Leuchtkraft, Masse-Radius Beziehung
Helioseismologie (Schallausbreitung im Sonneninneren), solare Neutrino-Flüsse

Innere Struktur der Sterne

- Weitere Annahmen:

hydrostatisches Gleichgewicht

Energieproduktion \sim konstant, $dL/dt \approx 0$

=> keine explizite Zeitabhängigkeit in den Grundgleichungen

- Wie gut sind diese Annahmen gerechtfertigt?

- Beobachtung:

die meisten Sterne ändern im Beobachtungszeitraum weder ihre Helligkeit, noch ihre Farbe

=> sowohl R als auch T ändern sich über lange Zeiträume nicht

- Jedoch: Sterne sind auch dynamische Objekte

=> sie strahlen Energie ab und entwickeln sich, da die Energiereserven nicht unbegrenzt sind, und die Energieerzeugung Spuren im Sterninneren hinterlässt

- Zeitweilig gelten jedoch obige Annahmen

- Im Folgenden: Grundgleichungen des Sternaufbaus

Hydrostatisches Gleichgewicht

- An jedem Punkt im Sterninneren muss der interne Druck groß genug sein, um um das Gewicht der äußeren Lagen auszuhalten:

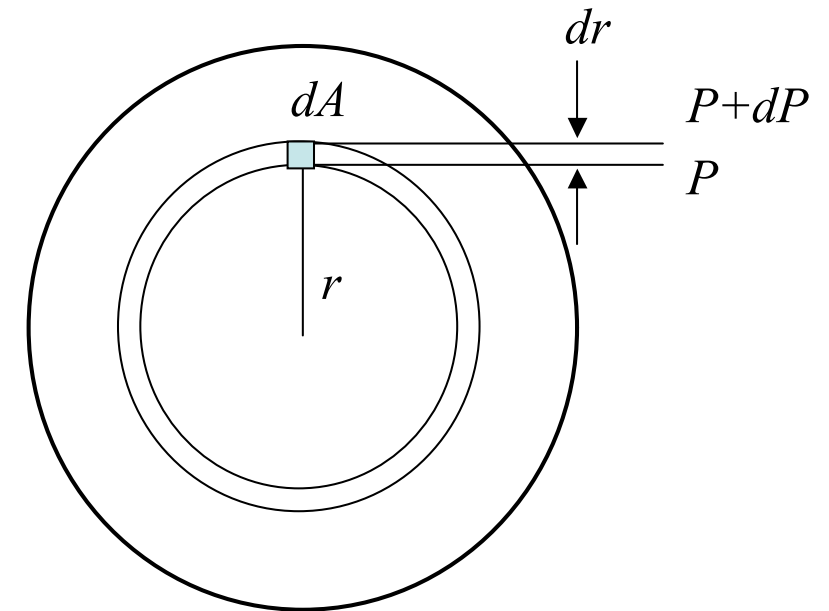
$$\frac{dP(\rho, T)}{dr} = -g \cdot \rho(r) = -\frac{GM_r}{r^2} \cdot \rho(r)$$

- mit $g = \frac{GM_r}{r^2}$ lokale Gravitationsbeschleunigung beim Radius r

- Bedeutung: nicht der Druck, sondern der Druckgradient stabilisiert den Stern gegen Gravitationskollaps (wobei Druck zur Oberfläche hin abnehmen muss)

- **Erste fundamentale Strukturgleichung für das Sterninnere**

- Beispiel: Druck im inneren der Sonne $P_c = 2.5 \times 10^{17} \text{ dyn cm}^{-2} \approx 1.5 \times 10^{11} \text{ atm}$
($1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$)



Massenerhaltung

- Sei Kugelschale der Masse dM_r und der Dicke dr im Abstand r vom Sternzentrum

- Das Volumen ist $V = 4\pi r^2 dr$

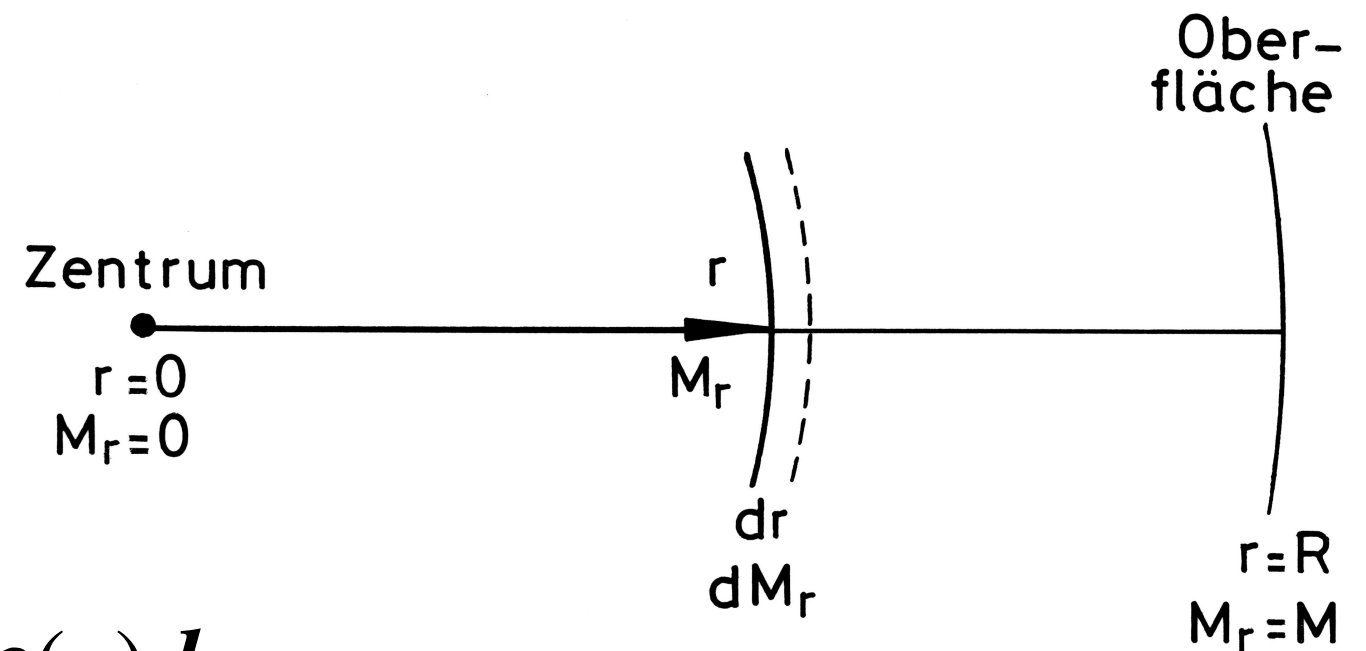
- Die lokale Dichte kann als konstant angenommen werden. Die Masse der Kugelschale wird damit:

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

- => die Differentialgleichung der Massenerhaltung:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

- Änderung der Masse mit dem Radius: die zweite fundamentale Strukturgleichung



Zustandsgleichung

- Beziehung zwischen Druck und Dichte, Temperatur, Teilchenzahl der Materie
- Relevant: Gas- und Strahlungsdruck

$$P_{tot} = P_{gas} + P_{rad}$$

- Gas: ideal, dh Wechselwirkung durch elastische Stöße

$$P_{gas} V = NkT$$

- mit: $n = \frac{N}{V}$ Anzahldichte pro Einheitsvolumen

$$\Rightarrow P_{gas} = nkT$$

$$n = \frac{\rho}{\bar{m}}, \quad \mu = \frac{\bar{m}}{m_H}, \quad m_H = 1.673525 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$\Rightarrow P_{gas} = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

m = mittlere Masse eines Teilchens
 μ = mittleres Molekulargewicht
 m_H = Masse der Wasserstoffatome

Temperatur nimmt zur Oberfläche hin ab => Druck nimmt auch ab

Zustandsgleichung

- Für das Zentrum der Sonne gilt:

$$T(0) = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$$

$$\rho(0) = 150 \text{ g cm}^{-3}$$

- $P_{\text{gas}}(r)$ kommt von der Bewegung der Gasteilchen (Ionen und Elektronen). Zusätzlicher Druck wird durch die nach außen fließende Strahlung erzeugt:

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4, \quad a = 7.565 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}, \quad \sigma = \frac{ac}{4}$$

- Für die Sonne ist:

$$P_{\text{rad}} = 1.57 \times 10^{14} \text{ dyn cm}^{-2} = 0.06 P_{\text{gas}}$$

- Jedoch spielt der Strahlungsdruck für $M \geq 10 M_{\odot}$ eine wichtige Rolle
- Falls der Strahlungsdruck sogar die Gravitation dominiert \Rightarrow Expansion des Sterns \Rightarrow Stabilitätslimit für Sterne ("Eddington-Limit") bei etwa $100 M_{\odot}$

Gesamtdruck:

$$P_{\text{tot}}(r) = \frac{\rho(r) k T(r)}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T(r)^4$$

Effekte der chemischen Zusammensetzung

- In der Zustandsgleichung müssen wir berücksichtigen, dass sich das mittlere Molekulargewicht der Teilchen im Gas als Funktion des Abstandes r vom Zentrum ändert:

es wird kleiner im Inneren, da hier die Atome ionisiert sind, dh dieselbe Masse verteilt sich auf mehrere Teilchen

Nukleosynthese ändert die chemische Zusammensetzung der brennenden Schalen ($H \rightarrow He \rightarrow C, O \rightarrow \dots$)

- Für komplett ionisierte H-Atome $\bar{m} = \frac{1}{2} m_H$
- Für ionisierte He-Atome $\bar{m} = \frac{4}{3} m_H$
- Für Metalle $\bar{m} = 2 m_H$

- In der Astronomie üblich: mittleres Molekulargewicht wird nicht über Teilchenzahlen, sondern über Massenbruchteile ausgedrückt

$$X = \frac{\text{Masse Wasserstoff}}{\text{Gesamtmasse Gas}}, \quad Y = \frac{\text{Masse Helium}}{\text{Gesamtmasse Gas}}, \quad Z = \frac{\text{Masse Metalle}}{\text{Gesamtmasse Gas}}$$

Effekte der chemischen Zusammensetzung

- mit $X + Y + Z = 1$

$$\Rightarrow \bar{m} = \frac{1}{2X + \frac{4}{3}Y + \frac{1}{2}Z} m_H \quad \text{mittleres Molekulargewicht}$$

- Anfangszusammensetzung der Sonne (spektroskopisch bestimmte Zusammensetzung an der Oberfläche):

$$X = 0.73, \quad Y = 0.25, \quad Z = 0.02$$

- Das gegenwärtige Zentrum der Sonne:

$$X = 0.42, \quad Y = 0.56, \quad Z = 0.02$$

Energiequellen von Sternen

- **Frage:** was sind die möglichen Energiequellen in Sternen?
- Historisch: großes Problem, Energiequellen zu identifizieren, die die Leuchtkraft der Sterne über $\approx 4 \times 10^9$ Jahre aufrechterhalten (Sonnenalter war über das Alter der Erde und von Meteoriten bekannt)!
- Die thermische Energie E_T , die in einem Stern gespeichert ist:

$$E_T = \int_0^R \frac{3kT}{2m} \rho(r) 4\pi r^2 dr \simeq \overline{\frac{3kT}{2m}} M$$

Integral über die thermische Energie pro Masseneinheit

- Die Gesamt-Gravitationsenergie E_G

$$E_G = \int_0^R -G \frac{M(r)}{r} \rho(r) 4\pi r^2 dr \simeq -\overline{\frac{GM(r)}{r}} M$$

- Für die Sonne:

$$E_T \approx 2.0 \times 10^{48} \text{ erg}, \quad E_G \approx -3.8 \times 10^{48} \text{ erg}$$

Energiequellen von Sternen

- **Virialsatz:** $2E_T = -E_G$
große Gravitationsenergie => große kinetische Energie => hohe Temperaturen
iA E_G = potentielle Energie, E_T = interne kinetische Energie des Systems
- **Virialsatz:** bei der Entstehung eines gebundenen Systems wird die Hälfte der potentiellen Gravitationsenergie als interne Energie gespeichert, während die andere Hälfte aus dem System entweicht
- **Für einen Stern (ideales Gas):** die innere Energie ist 1/2 der freiwerdenden Gravitationsenergie, und wird als thermische Energie gespeichert. Die andere 1/2 steht zur Abstrahlung von der Sternoberfläche zur Verfügung

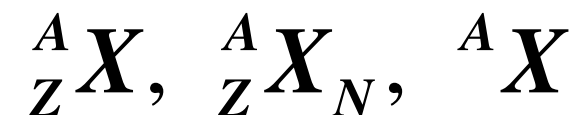
=> die Zeit in der die thermische Energie die Leuchtkraft der Sonne liefern könnte:

$$t_{KH} = \frac{E_T}{L_{\odot}} \simeq 4.4 \times 10^7 \text{ y} \quad \text{Kelvin-Helmholtz Zeitskala (thermische Zeitskala)}$$

=> viel zu kurz! (jedoch wird die Freisetzung von Gravitationsenergie bei der Sternentstehung und Entwicklung eine große Rolle spielen)

Atomkerne

- Kernprozesse involvieren typische Energien von \sim MeV
- Atomkern: Z Protonen p und N Neutronen n (p, n: Nukleonen)
- Massenzahl: $M = A + Z$



- $m_p = 1.67263 \times 10^{-24}$ g; $m_n = 1.674929 \times 10^{-24}$ g; $m_e = 9.109390 \times 10^{-28}$ g;

- Die Massen werden oft mit der atomaren Masseneinheit u ausgedrückt:

$$1 \text{ u} = 1.660540 \times 10^{-24} \text{ g} = 931.49432 \text{ MeV}/c^2$$

1/12 der Masse eines ${}^{12}\text{C}$ -Kerns

$$\text{H-Atom: } m_{\text{H}} = 1.007825 \text{ u} (= m_p + m_e - 13.6 \text{ eV})$$

- Äquivalenz von Masse und Energie: Energie, die bei der Bildung von H-Atom frei wird muß auf Kosten der Gesamtmasse gehen

Bindungsenergie = Energie, die aufgewendet muss, um einen Atomkern in seine Bestandteile aufzubrechen

- He-Kern: 2p, 2n; Bildung eines He-Kerns: $4{}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} +$ Teilchen niedriger Masse in Fusionsreaktion

Nukleare Zeitskala

- Summe der Masse der 4 ^1H -Atome: 4.031280 u
- Masse eines He-Atoms: $m_{\text{He}} = 4.002603 \text{ u}$
 - => die Differenz ("Massendefekt") $\Delta m = 0.028677 \text{ u}$ oder 0.7%
 - => die Bindungsenergie $E_b = 26.72 \text{ MeV}$
- Ist dies eine ausreichende Energiequelle für die Sonne?
- **Annahme:** die Sonne bestand zu 100% aus Wasserstoff und nur die inneren 10% der Masse können in He umgewandelt werden:

$$E_N \approx 0.1 \times 0.007 \times M_{\odot} c^2 = 1.3 \times 10^{51} \text{ erg}$$

$$\Rightarrow t_N = \frac{E_N}{L_{\odot}} \approx 10^{10} \text{ y} \quad \text{Nukleare Zeitskala}$$

=> ausreichend!

=> Kernreaktionen sind die Energiequellen der Sterne; sie wandeln leichte in schwerere Elemente in dem Sterninneren um

Energiebilanz

- Die bei Radius r pro Zeiteinheit nach außen geführte Energie L_r ist gleich der gesamten erzeugten Leistung

$$L_r = \int_0^{M_r} \varepsilon dM_r = \int_0^r \varepsilon(\rho, T) 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

- wobei $\varepsilon(\rho, T)$ ist die Energieerzeugungsrate pro Masse
- Die Differentialgleichung

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon(\rho, T)$$

L_r = Energiefluß durch Kugel mit Radius r

- $\varepsilon(\rho, T)$ wird durch die Kernphysik geliefert (betrachte alle Kernreaktionsraten bei gegebener Temperatur und Dichte (s.u.))
- **Dritte fundamentale Strukturgleichung für das Sterninnere**

Energietransport

- Energie kann transportiert werden durch:

Wärmeleitung: Kollision zwischen Teilchen (zB Ionen, Elektronen) im Inneren von Sternen. Mechanismus nicht wichtig in den meisten Sternen, da die mittlere freie Weglänge der Ionen und Elektronen extrem kurz, verglichen mit dem Sternradius. Wichtig jedoch falls die Elektronen ein degeneriertes Gas bilden (zB in weißen Zwergen) => die mittlere freie Weglängen der Elektronen werden sehr lang

Konvektion: Aufstieg von wärmeren Gasblasen in kühleres Material und Absinken von kühleren Gasblasen. Wesentlicher Mechanismus in bestimmten Schichten in viele Sternen (zB in den äußeren Schichten des Sonneninneren). Wird dann wichtig, wenn die Opazität so groß ist, dass der Energietransport durch Strahlung ineffektiv wird (großer T-Gradient)

Strahlung: Photonen werden absorbiert, und in eine zufällige Richtung reemittiert wenn sie mit Materie interagieren; Diffusion von innen nach außen bedingt Heizung der äußeren Schichten. Oft Hauptmechanismus des Energietransports (zB fast im gesamten Sonneninneren, unterhalb einer Tiefe von $\approx 100\,000$ km)

- **Allgemein:** alle 3 Prozesse werden durch den T-Gradienten bestimmt. Energietransport “nach außen” kann nur stattfinden, wenn $dT/dr < 0$, d.h. wenn $T(r)$ monoton abfällt (Ausnahme: optisch dünnes Medium).

Energietransport durch Strahlung

- Stern im Strahlungsgleichgewicht: Energie wird ausschließlich durch Strahlung zur Oberfläche transportiert; um die Gleichung für den Temperaturgradienten zu finden, beginnt man bei der Strahlungstransportgleichung:

$$\cos \vartheta \frac{dI_{\nu}}{dr} = -\kappa_{\nu} \rho I_{\nu}(\vartheta) + \epsilon_{\nu}$$

κ_{ν} =Absorptionskoeffizient pro Masseneinheit
 ϵ_{ν} =Emissionskoeffizient pro Masseneinheit

- unter Benutzung des Stefan Boltzmann Gesetzes kann man zeigen (Übung!) dass:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\pi} \frac{\kappa}{\sigma T^3} \frac{L(r)}{r^2}$$

Strahlung

=> dT/dr wird größer wenn κ wächst oder wenn L/r^2 größer wird. Für die Lösung dieser Gleichung muss κ exakt bekannt sein; er kann bei gegebener Zusammensetzung der Materie als Funktion von ρ und T berechnet werden

- Vierte fundamentale Strukturgleichung für das Sterninnere

Energietransport durch Strahlung

- Die Gleichung für den Strahlungstransport kann auch über den **Diffusionsansatz** hergeleitet werden. Wegen der Opazität der stellaren Materie findet der Strahlungstransport durch Dissipation von Photonen statt. Die mittlere freie Weglänge der Photonen l_γ entspricht einer optischen Tiefe für Absorption von $\tau = \kappa \cdot l_\gamma = 1$, wobei $\kappa = \kappa(\rho, T)$ den Absorptionskoeffizienten darstellt. Die Hauptbeiträge zu der Opazität im Inneren eines Sterns sind frei-frei und frei-gebunden Übergänge, sowie Streuung der Photonen an freie Elektronen. Eine gute Näherung für die mittlere Opazität ist:

$$\kappa \approx \sigma_T n_e \approx 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

- wobei:

$$\sigma_T = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} = 6.6652 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Thomson WQ für
freie Elektronen

- für die typischen Bedingungen in der Sonne ist:

$$l_\gamma \approx 10^{-7} R_\odot$$

- dies ist auch der Grund für das lokale thermodynamische Gleichgewicht (LTE)

Energietransport durch Strahlung

- Da $l_\gamma \ll R_\odot$, können wir die Diffusionsnäherung machen. Die universelle Diffusionsgleichung für Teilchen ist:

$$j = -\frac{1}{3} v l \frac{dn}{dr}$$

- In unserem Falle:

$$j : \text{Diffusionsflu\ss} \rightarrow \frac{L(r)}{4\pi r^2 h\nu} = \text{Photonenflu\ss}$$

$$v : \text{mittlere Teilchengeschwindigkeit} \rightarrow c \qquad l : \text{mittlere freie Weglänge} \rightarrow l_\gamma = \frac{1}{\kappa}$$

$$n : \text{Photonendichte} \rightarrow n = \frac{\sigma T^4}{ch\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{1}{3} c \frac{1}{\kappa} \frac{\sigma}{c} \frac{dT^4(r)}{dr}$$

- oder:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\pi} \frac{\kappa}{\sigma T^3} \frac{L(r)}{r^2}$$

Strahlung

Energietransport durch Konvektion

- **Konvektion**: der andere im Sterninnere relevante Mechanismus für den Transport von Energie => führt auf eine andere Form für den Temperatur-Gradienten

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma(\rho, T)} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

- mit $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ Adiabatenexponent; P = Gasdruck (für ein ein-atomisches Gas ist $\gamma=5/3$)

- Adiabatischer Prozess: kein Wärmeaustausch zwischen der Gasblase und ihrer Umgebung

$$C_p = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_P \quad \text{spezifische Wärme bei konstantem Druck}$$

$$C_v = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_V \quad \text{spezifische Wärme bei konstantem Volumen}$$

- für adiabatische Prozesse nimmt die Zustandsgleichung eines Gases die einfache Form an:

$$T \propto P^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

Energietransport durch Konvektion

- Wann kommt es im Inneren eines Sterns zu konvektivem Energietransport?
- Energietransport durch Strahlung muss ineffizient werden => Strahlungstemperaturgradient wird sehr groß
- Kriterium für Einsetzen von Konvektion

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{rad} > \left(\frac{dT}{dr} \right)_{adiab}$$

Strahlungsgradient größer als
adiabatischer Temperaturgradient

- Steiler Strahlungsgradient: wenn entweder die Flußdichte der Energie F (bzw L_r) oder der Absorptionskoeffizient κ zu groß werden
 - => im Innern des Sterns bilden sich Konvektionszonen aus
 - => die Tiefe der Konvektionszonen können nur in aufwendigen numerischen hydrodynamischen Simulationen berechnet werden

Hauptgleichungen für den Sternaufbau: Zusammenfassung

1.
$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \cdot \rho(r)$$

Hydrostatisches
Gleichgewicht

2.
$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Massenerhaltung

3.
$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon(\rho, T)$$

Energiebilanz

4a.
$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3}{16\pi} \frac{\kappa}{\sigma T^3} \frac{L(r)}{r^2}$$

Energietransport: Strahlung

4b.
$$\frac{dT(r)}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma(\rho, T)}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

Energietransport: Konvektion

Materialgleichungen: Zusammenfassung

- Zusätzlich zu 1. - 4. haben wir noch

$$P_{tot}(r) = \frac{\rho(r)kT(r)}{\mu m_H} + \frac{1}{3}aT(r)^4 \quad \text{Zustandsgleichung}$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T, \text{Zusammensetzung}) \quad \text{Opazität}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, \text{Zusammensetzung}) \quad \text{Energieerzeugungsrate}$$

- Die 4 Strukturgleichungen sind gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung

=> numerische Lösungen sind notwendig; iterative Integration bis alle Bedingungen erfüllt sind

=> Randbedingungen:

Im Zentrum (r=0)

$$M_r(0) = 0$$

$$L_r(0) = 0$$

An der Oberfläche (r=R*)

$$P_r(R^*) = 0$$

$$T_r(R^*) = 0$$

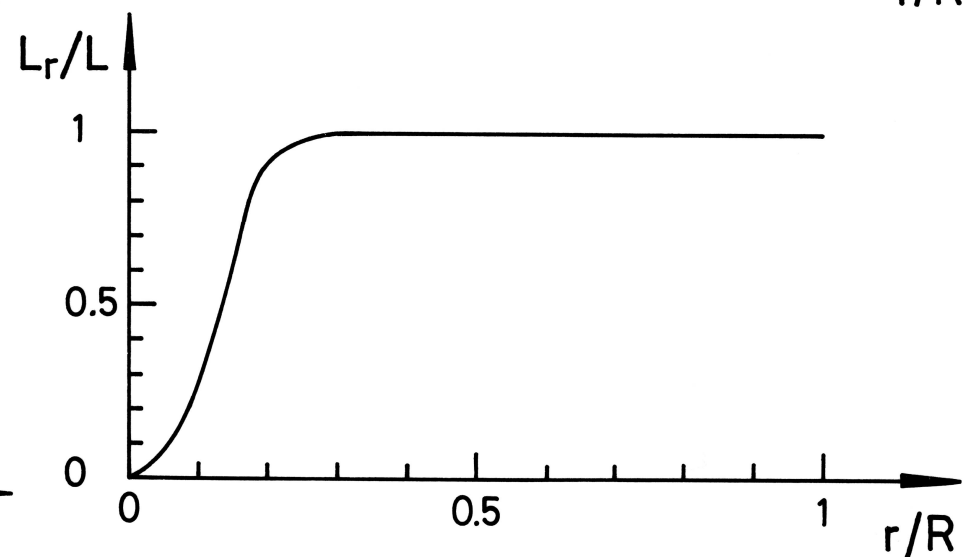
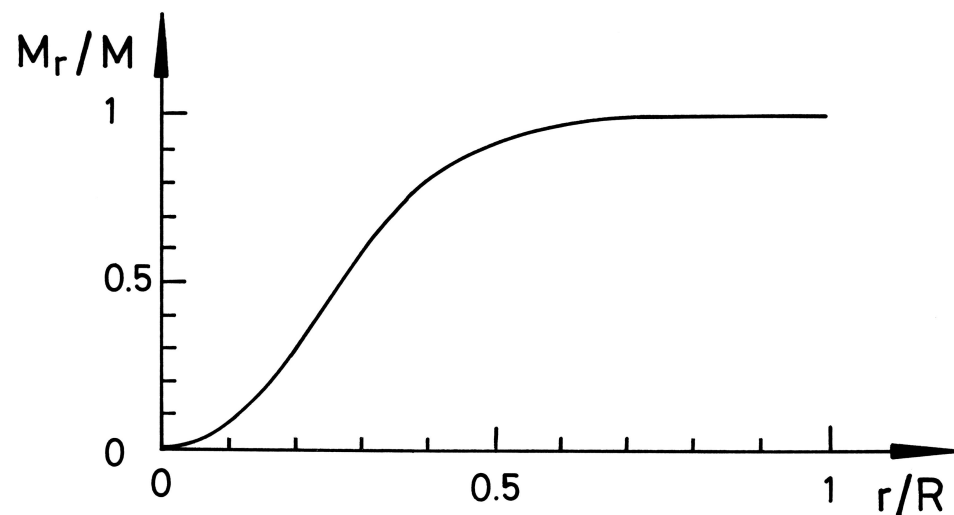
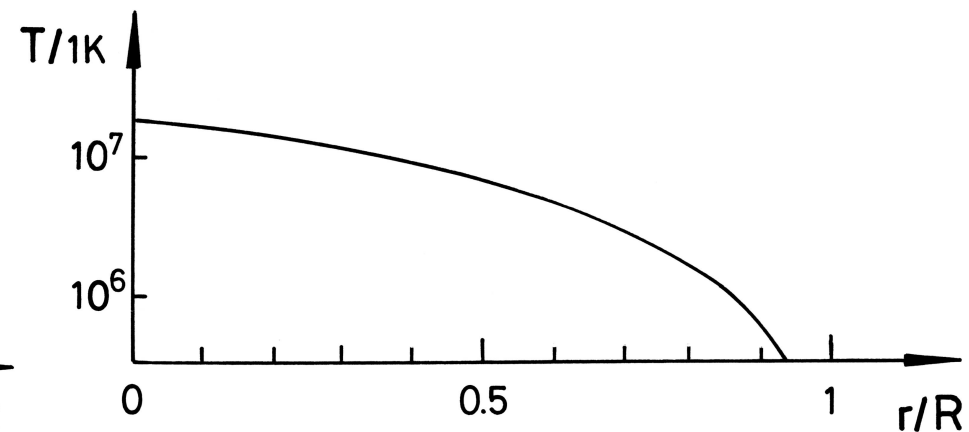
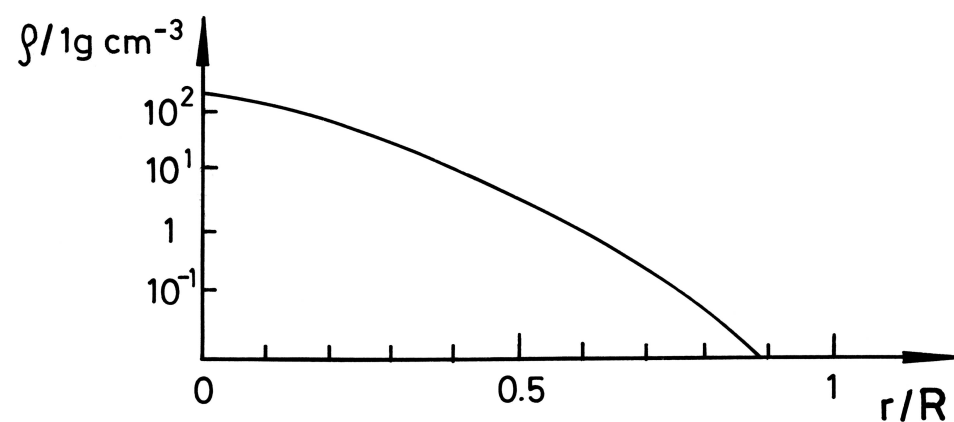
$$\rho(R^*) = 0$$

eigentlich $P_r(R^*) = P_{\text{photosph}}$

$$T_r(R^*) = T_{\text{photosph}}$$

Sternmodelle

- => Masse und chemische Zusammensetzung eines Sterns bestimmen eindeutig seine Struktur und innerer Aufbau, einschließlich Radius, Leuchtkraft und Oberflächentemperatur (“Vogt-Russel-Theorem”, eher allgemeine Regel, da es nicht strikt gültig ist)
- Beispiel: $M(r)$, $T(r)$, $L(r)$, $\rho(r)$ für Stern mit einer Sonnenmasse und solare chemische Zusammensetzung



Skalierungsrelationen

- **Ansatz:** vereinfachte Differentialgleichungen des Sternaufbaus durch Ersetzen der Funktionswerte durch geeignete Mittelwerte

$$\begin{array}{ll} r \rightarrow \frac{R_*}{2} & \frac{dM_r}{dr} \rightarrow \frac{M_*}{R_*} \\ M_r \rightarrow \frac{M_*}{2} & \frac{dL_r}{dr} \rightarrow \frac{L_*}{R_*} \\ L_r \rightarrow \frac{L_*}{2} & \dots \end{array}$$

- Auch Druck, Dichte und Temperatur werden durch Mittelwerte ersetzt $P, \rho, T \rightarrow \bar{P}, \bar{\rho}, \bar{T}$ (eher ähnlich den Zentralwerten); weitere Vereinfachungen:

$\kappa = \text{konstant}$

$$\rho \propto \frac{P}{T} \quad \text{ideales Gas}$$

$$\varepsilon \propto \rho T^K$$

Skalierungsrelationen

- Aus den Sternaufbaugleichungen folgen die Proportionalitäten

$$\begin{array}{ll} 1. & \frac{M}{R} \propto R^2 \cdot \bar{\rho} \\ 2. & \frac{L}{R} \propto R^2 \cdot \bar{\rho}^2 \cdot \bar{T}^k \\ 3. & \frac{\bar{P}}{R} \propto \frac{M}{R^2} \cdot \bar{\rho} \\ 4. & \frac{\bar{T}}{R} \propto \frac{\bar{\rho} \cdot L}{\bar{T}^3 \cdot R^2} \end{array}$$

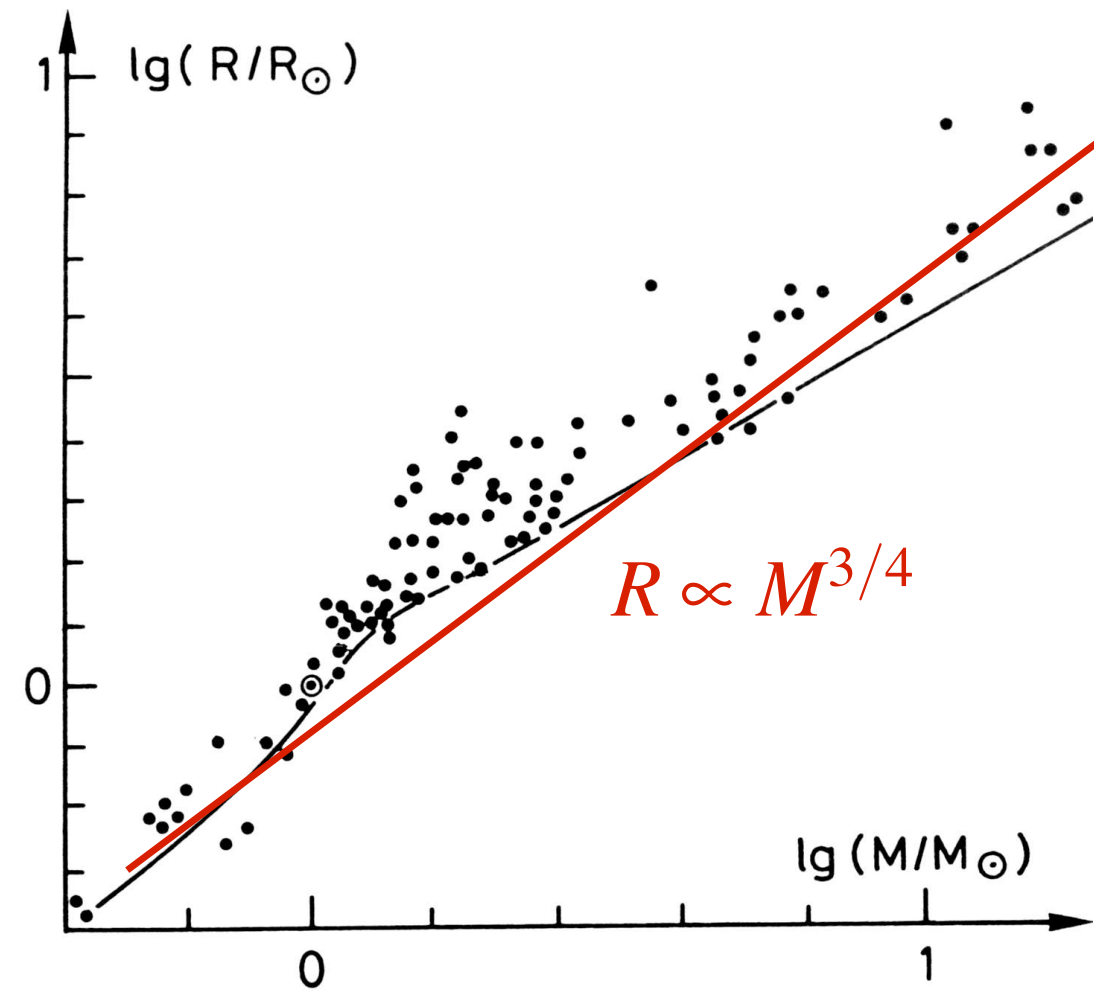
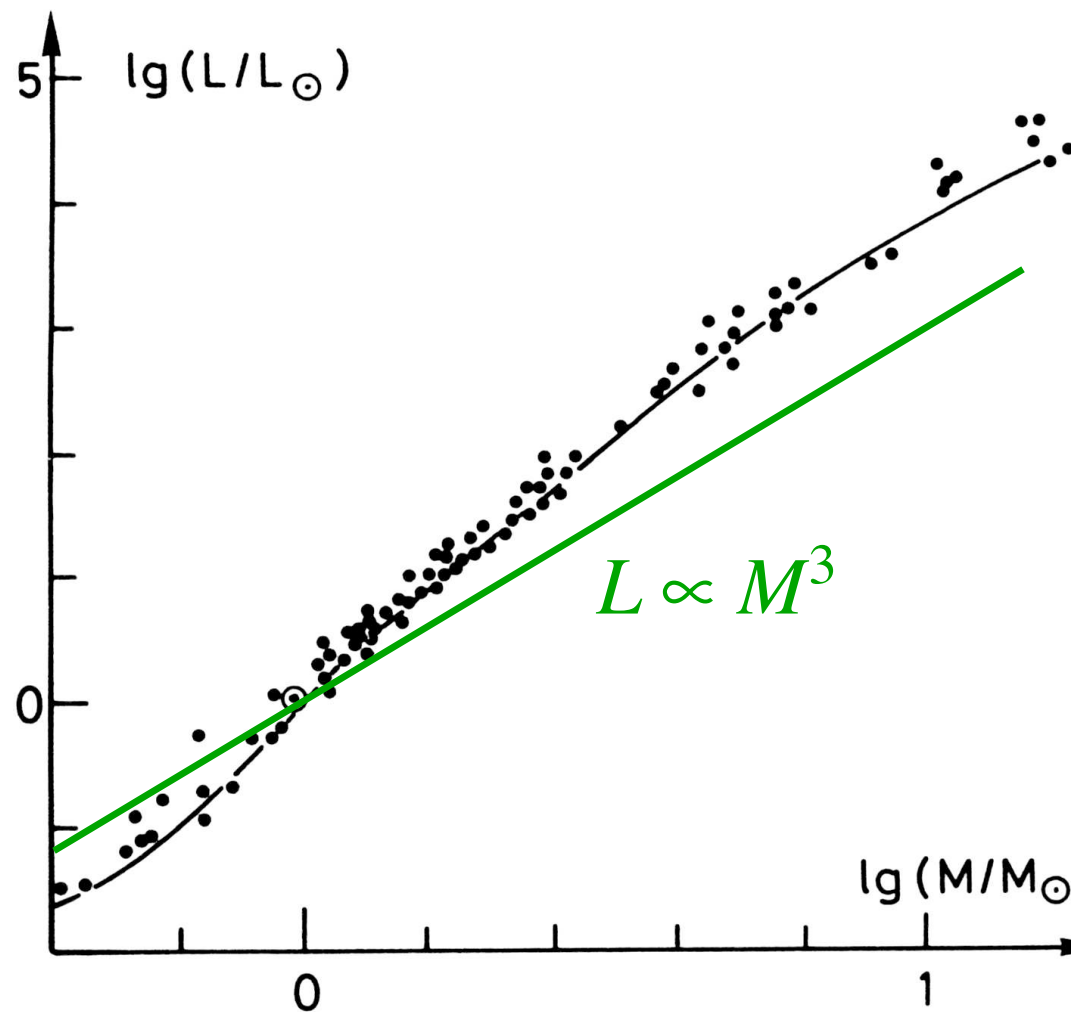
- und durch Kombination von (1), (3) und (4) folgt

$$\begin{aligned} L &\propto M^3 \\ R &\propto M^{\frac{k-1}{k+3}} \end{aligned}$$

- diese Beziehungen können wir mit den beobachteten Relationen für Hauptreihensterne vergleichen

Skalierungsrelationen für Hauptreihensterne

- schon die einfachen Betrachtungen reproduzieren ~ die beobachtete Masse-Leuchtkraft- und die Masse-Radius-Beziehung (für $k \approx 5 \dots 17$) für Hauptreihensterne



Weigert, Wendker, Wisotzki

Die Hauptreihe

- **Aus Sternspektren:** H dominiert in den meisten Sternen ($X \sim 0.7$). Gehalt an schweren Elementen variiert von $Z \sim 0.03$... $Z \sim 0.001$
- **Annahme:** am Anfang seiner Entwicklung ist die Zusammensetzung eines Sterns homogen
- Die ersten Kernreaktionen, die im Inneren zünden können, sind diejenigen mit der niedrigsten benötigten Temperatur => Umwandlung von H zu He
- **Wasserstoffbrennen: langsamer Prozess mit nuklearer Zeitskala $\sim 10^{10}$ Jahre**

=> langsame Veränderung der inneren Zusammensetzung und damit auch der inneren Struktur => auch langsame Veränderungen der observablen Zustandsgrößen

Da sich die Anfangszusammensetzung der Sterne nicht stark unterscheidet

=> Erwartung einer gleichmäßigen Änderung der Zustandsgrößen vor allem mit der Masse

T_C steigt mit M : pp-Kette dominiert bei massearmen, CNO-Zyklus bei massereichen Sternen

L sollte auch mit M steigen, da nukleare Energieerzeugung steil mit T_C ansteigt: => M-L-Beziehung

- Massebereich, in dem Kernreaktionen möglich sind:

$$0.08 M_{\odot} \leq M \leq 90 M_{\odot}$$

T_C ausreichend, damit H-Brennen zünden kann

Kernbrennen wird instabil (Oszillationen)

Die Hauptreihe

- Theoretische Stern-Modelle

=> numerische Beziehungen zwischen M und L, die gut mit den beobachteten Werten übereinstimmen

=> Beziehung $T_{\text{eff}} - L$, die empirisch beobachteter Hauptreihe entspricht

=> Hauptreihe: im Kern H-brennende Sterne $5 \times 10^{-4} L_{\odot} \leq L \leq 10^6 L_{\odot}$

- Da $\epsilon_N \propto M$ und $L \propto M^3$ (für $\kappa = \text{const}$)

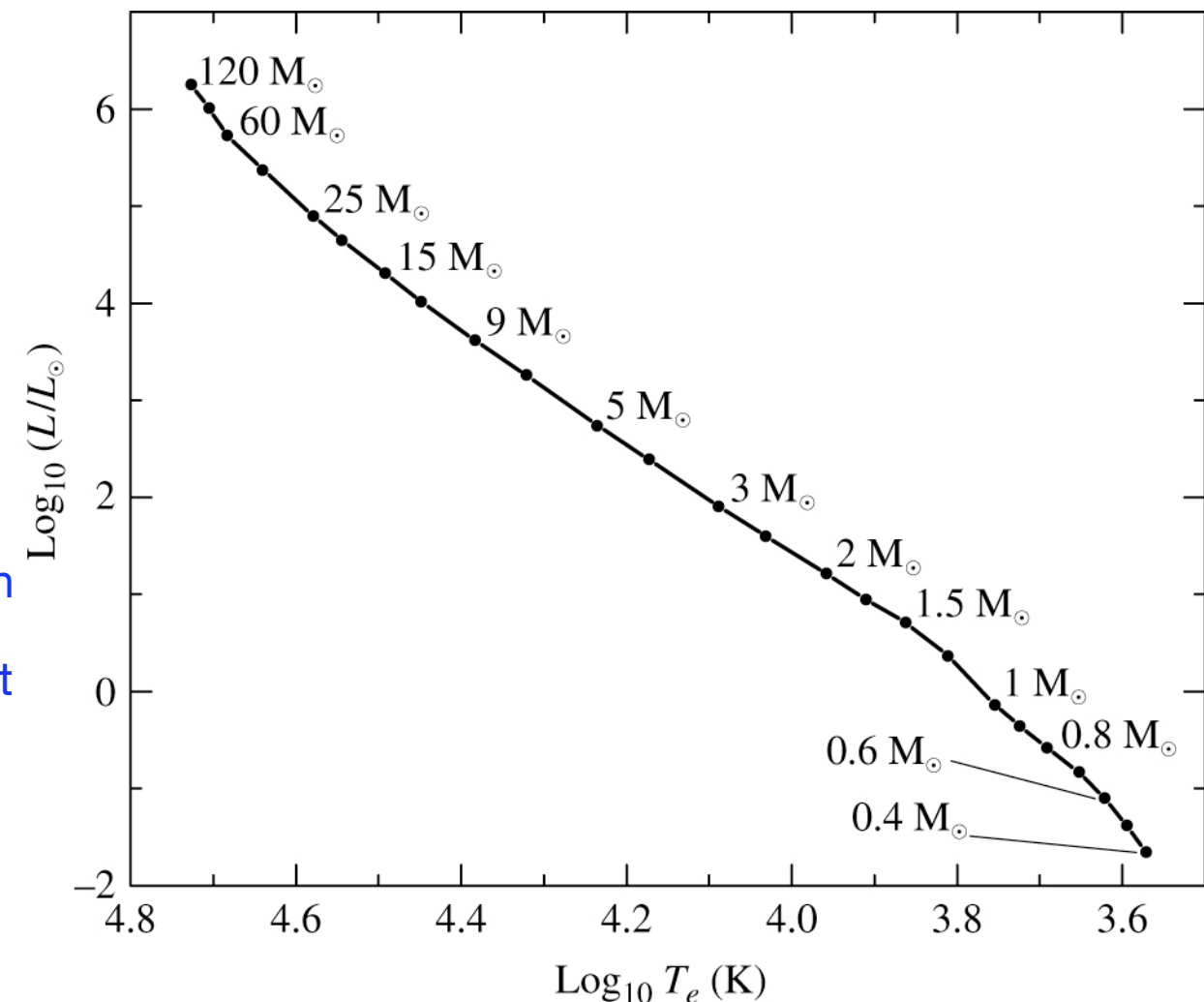
$$\Rightarrow t_* = \frac{\epsilon_N}{L} \propto M^{-2}$$

=> massereiche Sterne leben wesentlich kürzer!

Bereich T_{eff} : Faktor 20 \rightarrow reicht für starke Änderungen des Spektrums (Spektralklassen!) aus

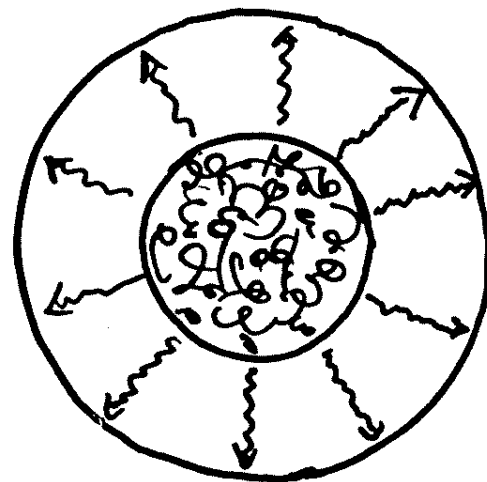
=> durch Vergleich mit theoretischen Modellen können HR-Sternmassen mit beobachteten Spektren korreliert werden

Carroll & Ostlie

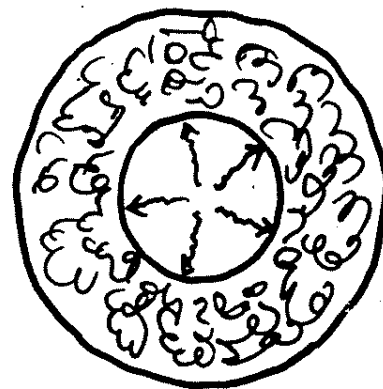


Die Hauptreihe: Konvektionszonen

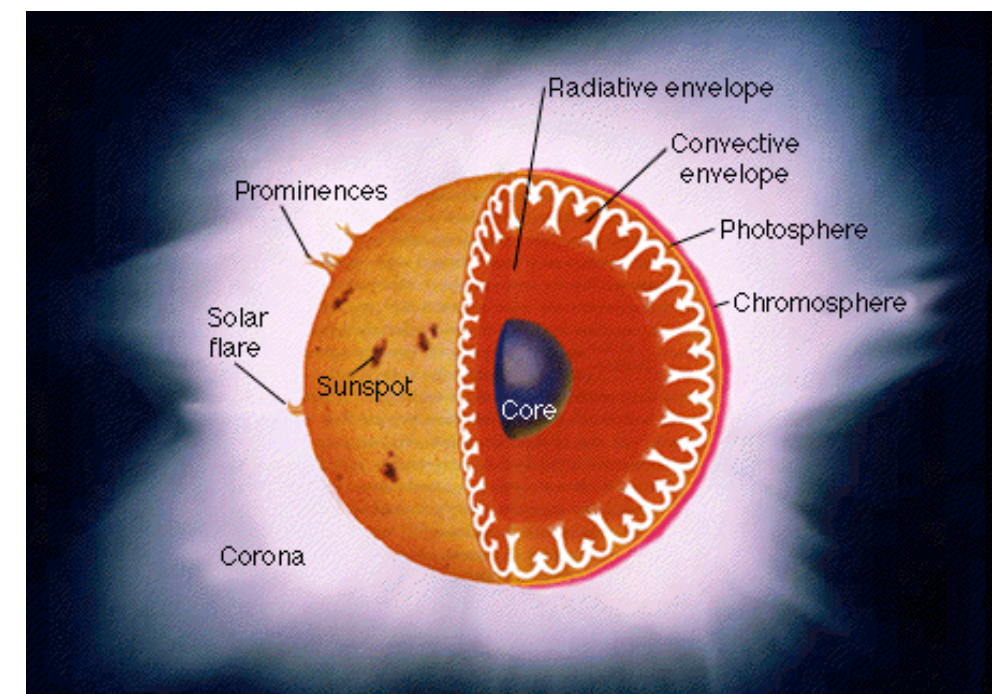
- Die **innere Struktur** variiert auch primär mit der Masse → Lage der Konvektionszonen
- **Oberer Teil der Hauptreihe:** CNO-Zyklus dominiert → starke T-Anhängigkeit → sehr steiler Strahlungs-Temperatur-Gradient
 - => Konvektionszone im Kern
- **Unterer Teil der Hauptreihe:** Opazität steigt bei niedrigerem T_{eff} (kleinerer Masse) in der Nähe der Oberfläche → Zusammenhang mit Lage und Ausdehnung der Konvektionszone
 - => oberflächennahe Konvektionszone bei Sternen mit $M \leq 1.4 M_{\odot}$
 - => Sterne sehr niedriger Masse ($M \leq 0.3 M_{\odot}$) voll konvektiv bis in den Kern



$$M \geq 1.4 M_{\odot}$$

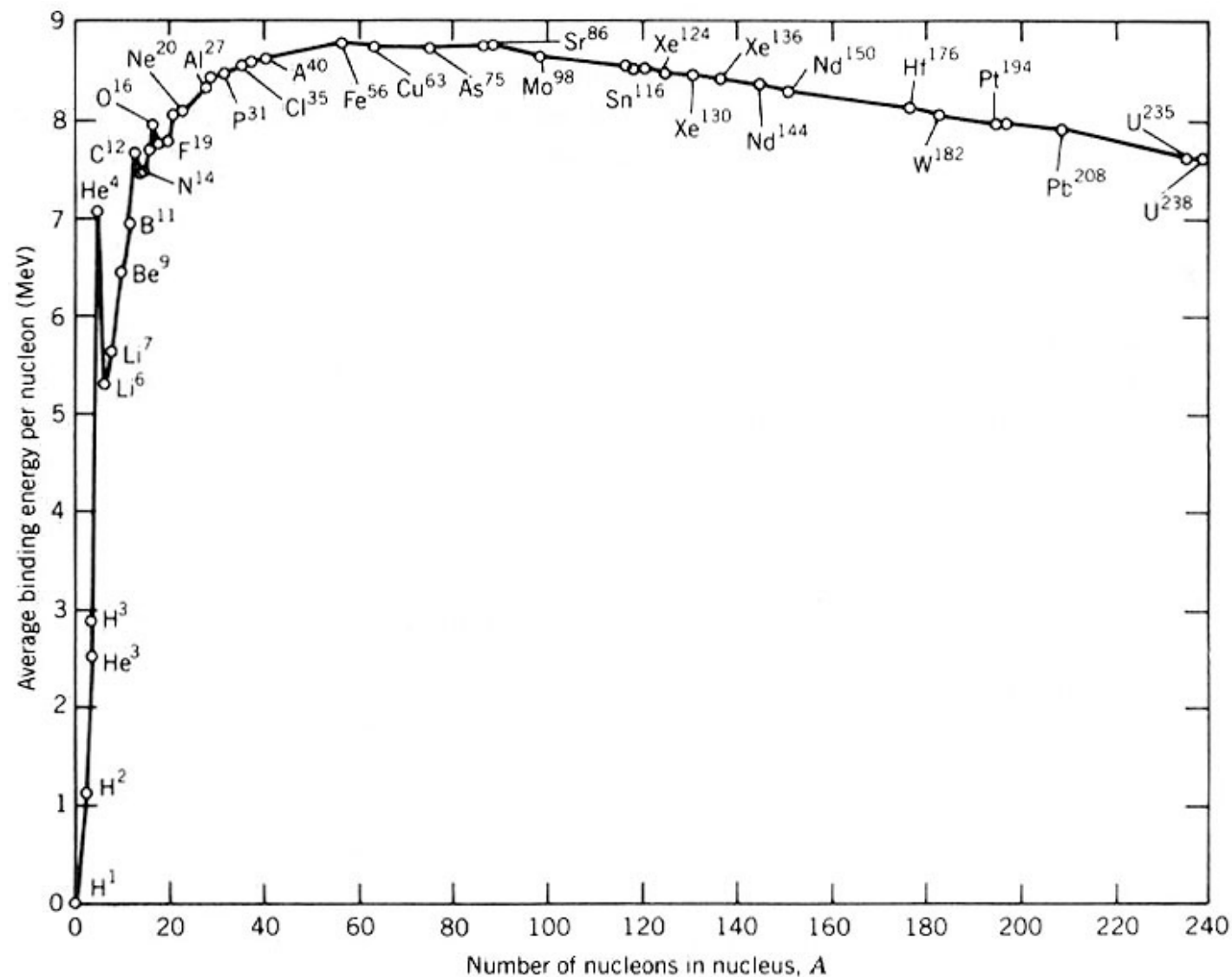


$$M \leq 1.4 M_{\odot}$$



Nukleare Energieerzeugung in Sternen

- Wir hatten gesehen, dass die Bindungsenergie, die bei $4p \rightarrow {}^4\text{He}$ freigesetzt wird ($\Delta E = 26.72 \text{ MeV}$), es einem sonnenähnlichen Stern erlauben würde, etwa $t = 10^{10}$ Jahre zu leben.
- Der Energiegewinn durch Kernfusionen ist für H-Brennen am höchsten, und nimmt für schwerere Elemente ab \rightarrow bis ${}^{56}\text{Fe}$, danach werden die Reaktionen 'endotherm' ($\Delta mc^2 < 0$)



Bindungsenergie pro Nukleon

Wahrscheinlichkeit für eine Kernreaktion

- Die Zentraltemperatur der Sonne ist $T_C \approx 1.3 \times 10^7$ K. Die kinetische Energie der Protonen ist etwa:

$$E_{kin,p} = \frac{3}{2} kT_C \approx 1.7 \text{ keV}$$

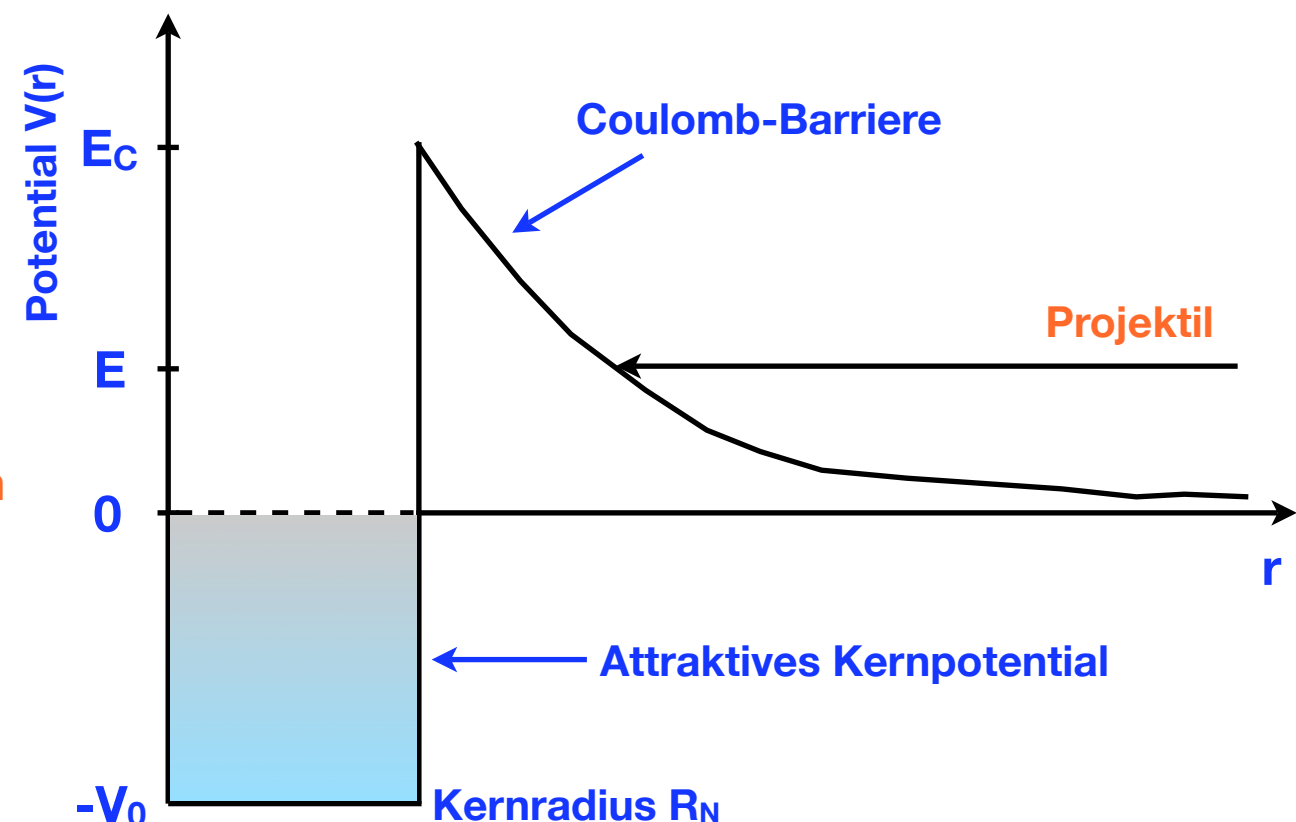
=> viel kleiner als die **Coulomb-Barriere** zwischen den Protonen

- Zwei positiv geladene Kerne stoßen sich ab mit $F_C \propto r^{-2}$ => keine gebundene Zustände. Bei sehr kleinen r (\sim fm) : Bindung durch die starke Kernkraft

- Potentielle Energie der Coulomb-Abstoßung

$$V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

für Protonen ($Z_1=Z_2=1$) ist die Höhe der Coulomb-Barriere $E_C = 550$ keV => **klassisch kann die Reaktion nur stattfinden, falls $T_C \approx 7 \times 10^9$ K!**



Wahrscheinlichkeit für eine Kernreaktion

- **Argument:** Kernreaktionen können zwischen den Protonen stattfinden, deren Energien sich im hochenergetischen Teil der MB-Geschwindigkeitsverteilung befinden $\phi(E) \propto E \exp(-E / kT)$
- Für eine Zentraltemperatur von $\approx 10^7$ K ist das Verhältnis

$$\frac{\phi(550)}{\phi(1.7)} \approx 10^{-275}$$

=> viel zu klein, um die Energieproduktion der Sterne zu erklären ("nur" etwa 10^{57} Nukleonen in der Sonne)!

- **Lösung (Gamov, 1929): der quantenmechanische Tunneleffekt** → es existiert eine kleine, jedoch endliche Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen mit $E < E_C$ die Coulomb-Barriere überwinden
- Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$P_{QM} = e^{-\frac{b}{\sqrt{E}}} \quad b = 31.22 \cdot Z_1 Z_2 \left(\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \right)^{1/2} (\text{keV})^{1/2}$$

- Für die pp-Reaktion in der Sonne: $T \approx 10^7$, $E = 3/2kT$, $Z_1=Z_2=1$, $A_1=A_2=1$

$$P_{QM} \sim 10^{-10}$$

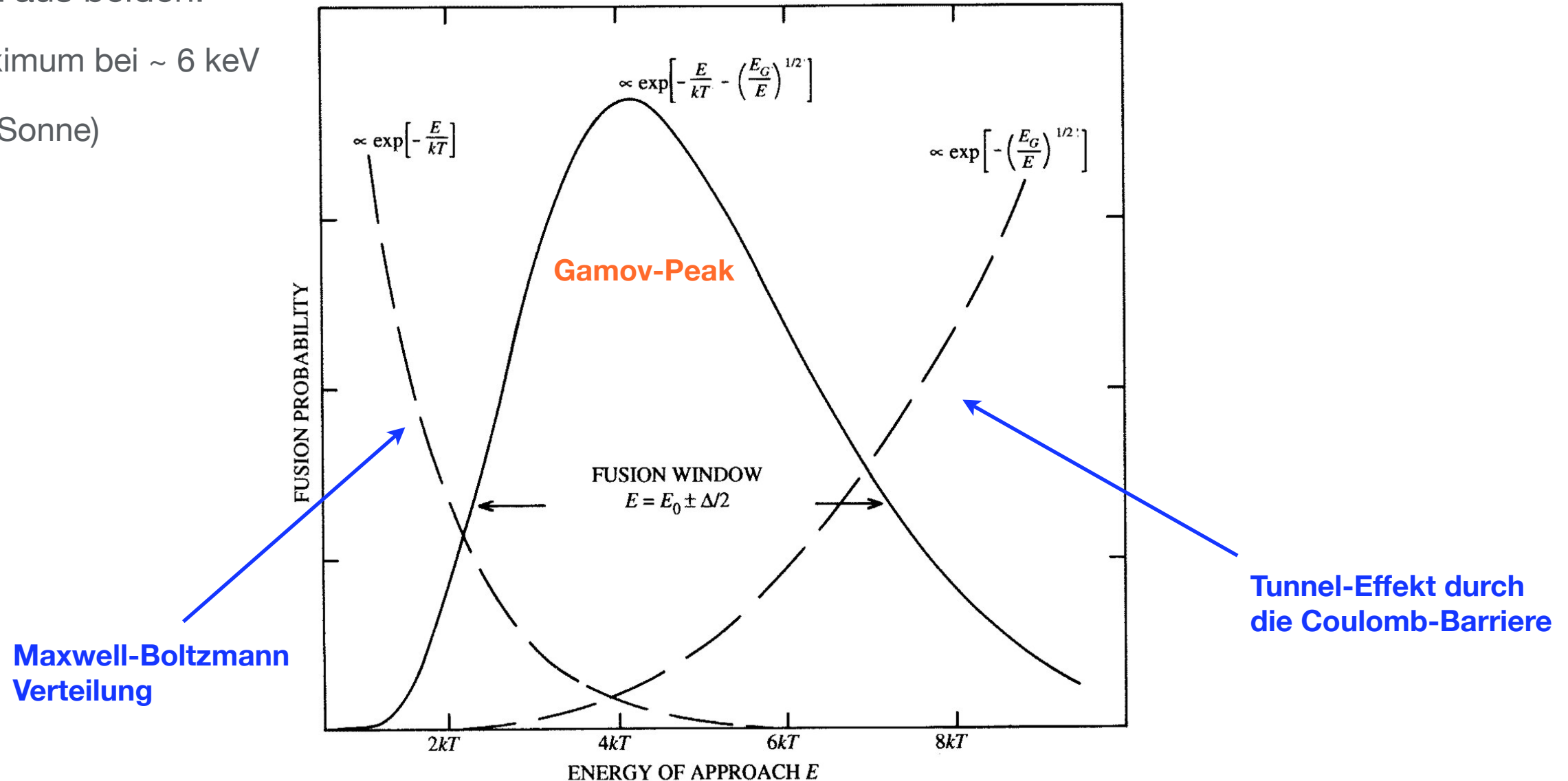
=> es funktioniert!

man sieht auch, dass P_{QM} größer ist für leichtere Kerne, und dass für schwerere Kerne höhere T benötigt werden

Wahrscheinlichkeit für eine Kernreaktion: Gamov-Peak

- **Energiefenster für die Kernreaktion → Gamov-Peak**
- Wahrscheinlichkeit des Effekts: \propto Anteil schneller Teilchen und \propto Tunnelwahrscheinlichkeit
- Produkt aus beiden:

Maximum bei ~ 6 keV
(für Sonne)



=> größter Beitrag zur Reaktionsrate kommt bei gegebener Temperatur aus einem engen Energieband!

Die Reaktionsrate

- **Was ist die Anzahl der Kernreaktionen pro Volumen und Zeit?** Um diese zu berechnen, müssen wir den **Wirkungsquerschnitt (WQ) $\sigma(E)$** kennen:

$$\sigma(E) = \frac{\text{Anzahl der Reaktionen/Kern/Zeit}}{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen/Fläche/Zeit}}$$

- **Anschaulich:** die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Teilchen sich treffen wächst mit der geometrischen Fläche der Kerne $\sigma_{geom} = \pi(R_p + R_t)^2$. Aus der Kernphysik: $R = R_0 A^{1/3}$, $R_0 = 1.3 \times 10^{-13} \text{ cm} = 1.3 \text{ fm}$

Der geometrische WQ für die p+p - Reaktion ist $\sigma_{geom} = 0.2 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.2 \text{ barn}$

QM: wir müssen den geometrischen WQ mit $\sigma = \pi\lambda^2$ ersetzen, $\lambda =$ de Broglie-Wellenlänge des Systems

- **Die Reaktionsrate:** $R_N = \underbrace{N_X v}_{\text{Fluss der Teilchen X}} \underbrace{N_Y \sigma(v)}_{\text{Effektive Targetfläche der Teilchen Y}}$

Fluss der Teilchen X **Effektive Targetfläche der Teilchen Y**

- Wir müssen noch mit der Geschwindigkeitsverteilung $\Phi(v)$ falten, und erhalten

$$R_N = N_X N_Y \int_0^\infty \phi(v) v \sigma(v) dv = N_X N_Y \langle \sigma v \rangle$$

Maxwell-Boltzmann
Verteilung

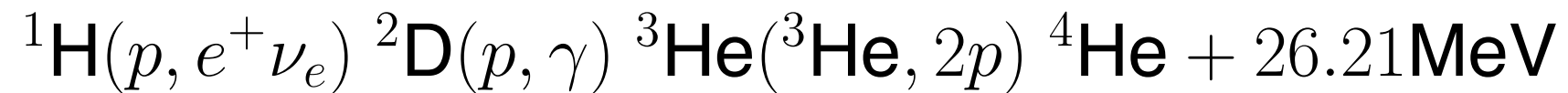
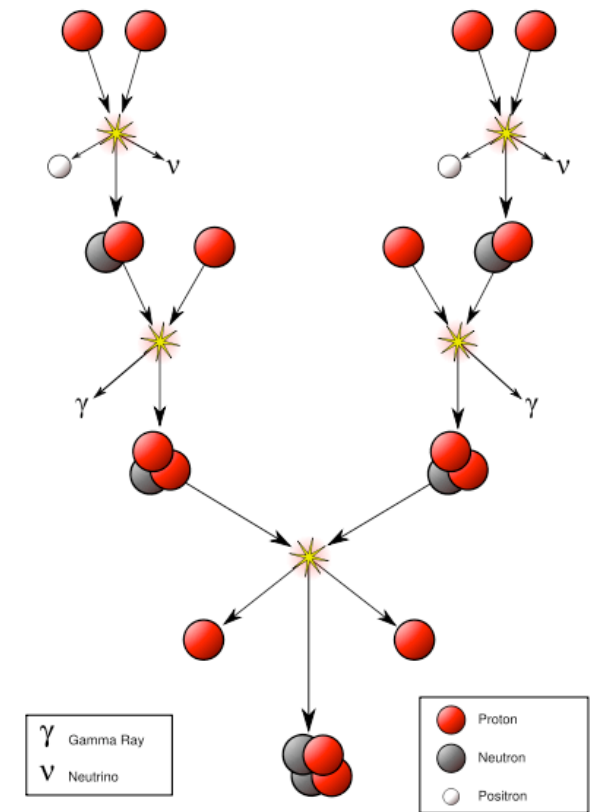
$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m_r} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int \sigma(E) E \cdot e^{-E/kT} dE$$

$$m_r = m_X m_Y / (m_X + m_Y)$$

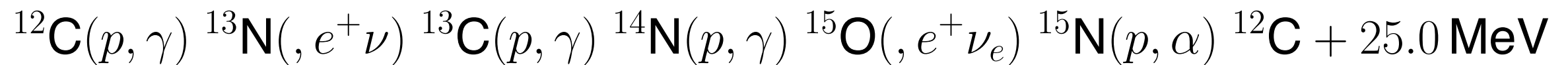
reduzierte Masse

Wasserstoffbrennen

- Sterne enthalten etwa 90% Wasserstoff, 10% Helium und 1% schwere Elemente (Teilchenzahl, bei Geburt); 90% aller Sterne brennen Wasserstoff im Inneren
- Verschmelzung von 4 H-Kernen zu 1 He-Kern, setzt von allen Fusionsprozessen die meiste Energie pro Masse frei
- Gleichzeitige Kollision von 4 H-Kernen extrem unwahrscheinlich! Der Prozess läuft als Reaktionskette ab. Mögliche Reaktionsketten:
- pp-Kette ($5 \times 10^6 \text{ K} \leq T_c \leq 1.6 \times 10^7 \text{ K}$)



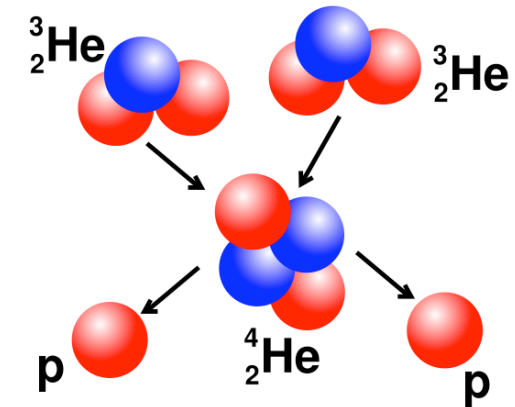
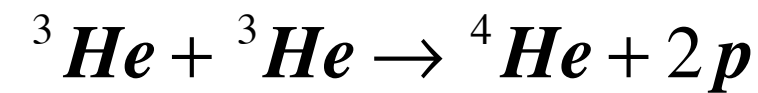
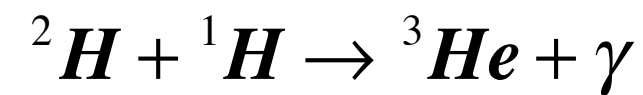
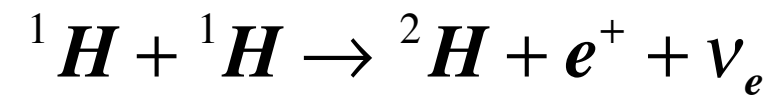
- CNO-Zyklus ($T_c \geq 1.6 \times 10^7 \text{ K}$)



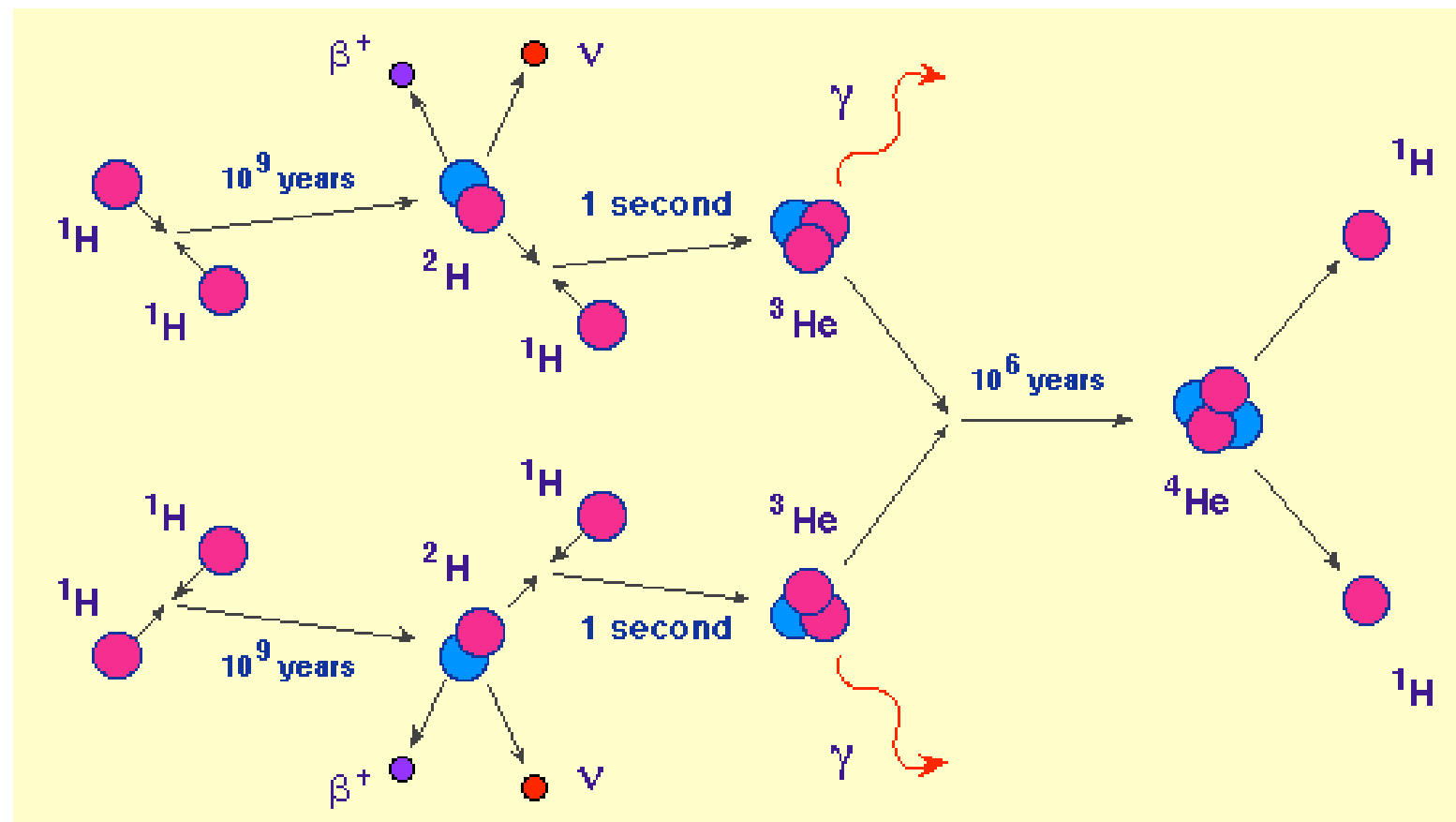
die Differenz in der freigesetzten Energie kommt von den Neutrinos, die aus dem Sterninneren ohne WW entweichen

Die pp-Kette

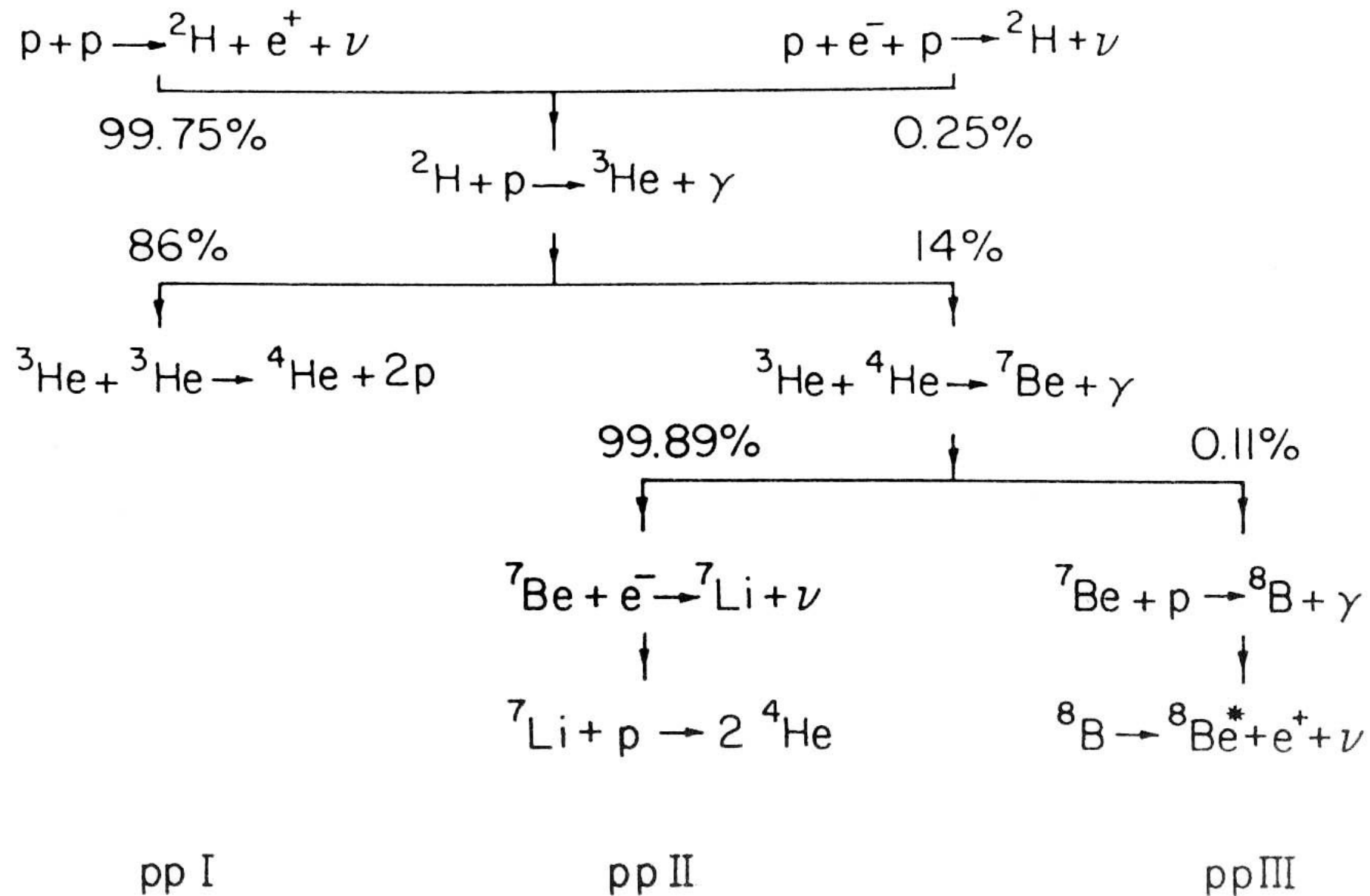
- PPI-Reaktionskette:



- Jeder Schritt: seine eigene Reaktionsrate, da die Coulomb-Barrieren und die WW unterschiedlich sind
- Der langsamste Schritt: der erste, da dies ein Prozess der schwachen WW ist ($\sigma \sim 10^{20}$ x mal kleiner als $\sigma_{\text{stark!}}$) => kontrolliert daher die Reaktionsrate



Die pp-Kette und Sonnenneutrinos



$$\bar{E}_\nu(p + p) = 0.26 \text{ MeV}$$

$$Q_{\text{eff}} = Q - 2\bar{E}_\nu(p + p) = 26.20 \text{ MeV}$$

$$\bar{E}_\nu(p + p) = 0.26 \text{ MeV}$$

$$\bar{E}_\nu({}^7\text{Be}) = 0.81 \text{ MeV}$$

$$Q_{\text{eff}} = Q - 2\bar{E}_\nu(p + p) - \bar{E}_\nu({}^7\text{Be}) = 25.66 \text{ MeV}$$

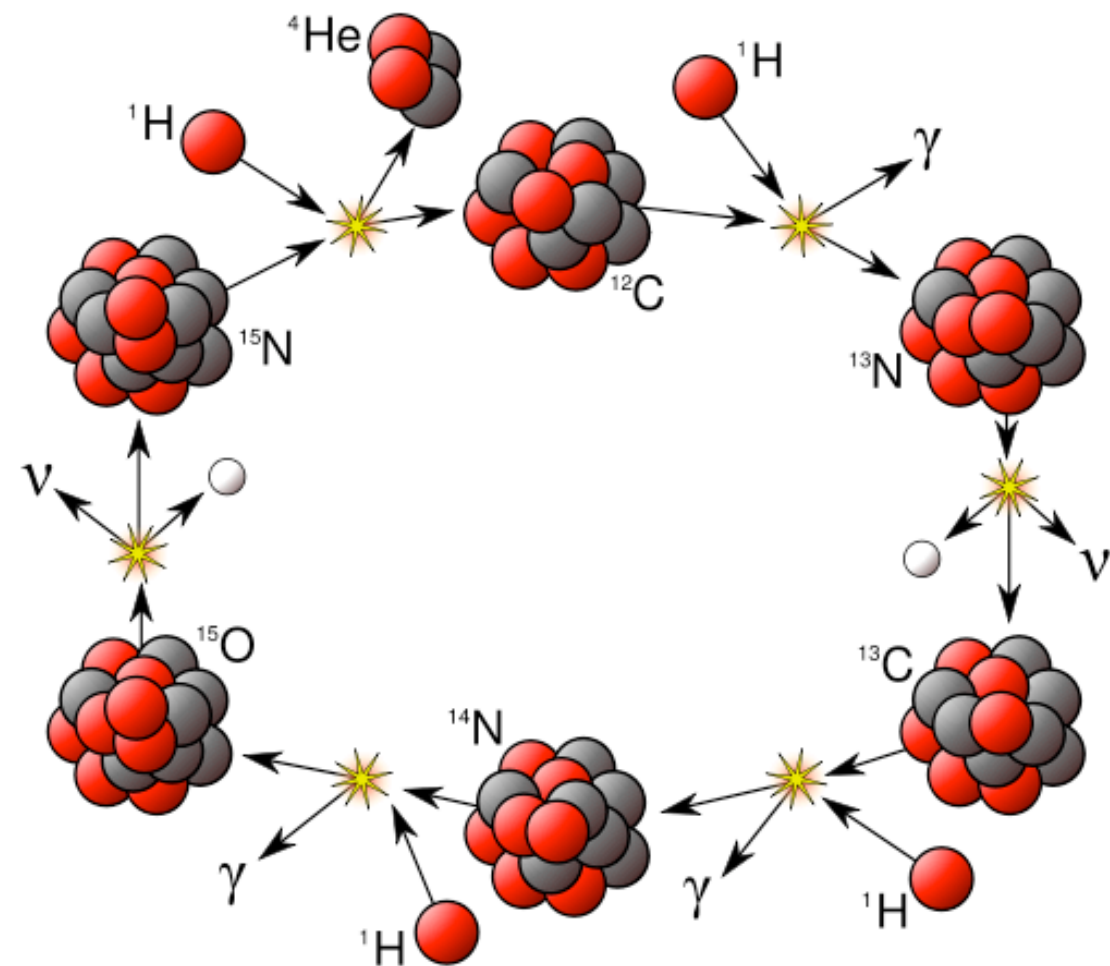
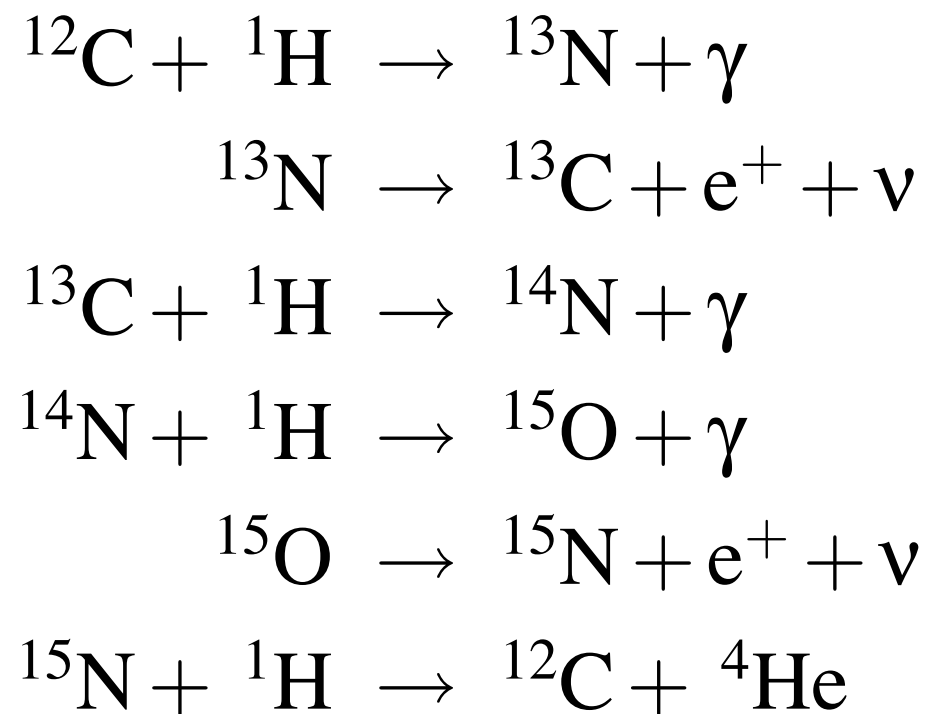
$$\bar{E}_\nu(p + p) = 0.26 \text{ MeV}$$




$$\bar{E}_\nu({}^8\text{B}) = 7.3 \text{ MeV}$$

$$Q_{\text{eff}} = Q - 2\bar{E}_\nu(p + p) - \bar{E}_\nu({}^8\text{B}) = 19.17 \text{ MeV}$$

Der CNO-Zyklus

- Sterne 2ter oder 3ter Generation (Population I) enthalten die Elemente C, N, O; diese können als “Katalysatoren” für die Reaktion $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$ ($Q = 26.72 \text{ MeV}$) dienen.



	Proton	γ	Gamma Ray
	Neutron	ν	Neutrino
	Positron		

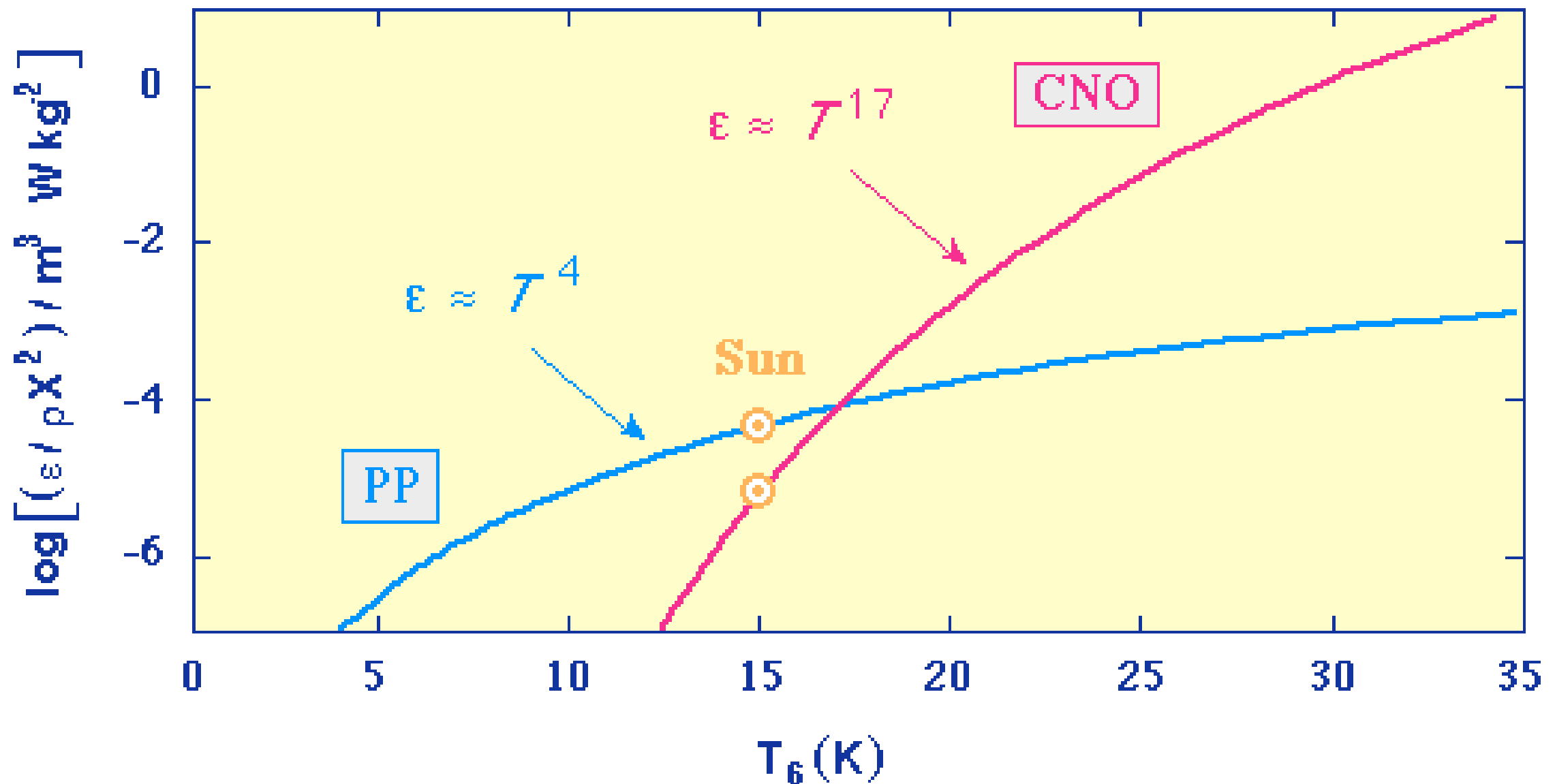
- Sonne: 98%-99% der Energieproduktion via pp-Kette, 1% via CNO-Zyklus

T-Abhängigkeit der pp-Kette und CNO-Zyklus

- Energieerzeugungsraten:

pp-Kette $\epsilon(T) \propto T^4$ (bei $T \approx 1.5 \times 10^7 \text{K}$)

CNO-Zyklus $\epsilon(T) \propto T^{17}$



Brennen der Elemente schwerer als Wasserstoff

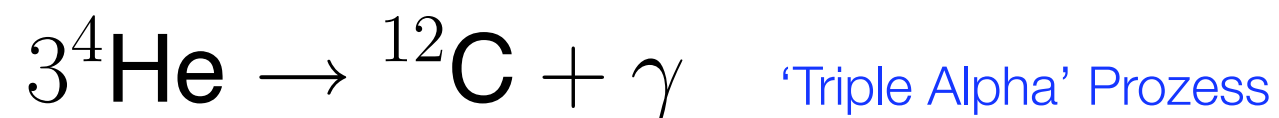
- Wenn signifikanter Teil des H im Innern des Sterns verbraucht ist

=> das Molekulargewicht μ im Kern erhöht sich

=> Druck fällt und der Kern beginnt zu kollabieren

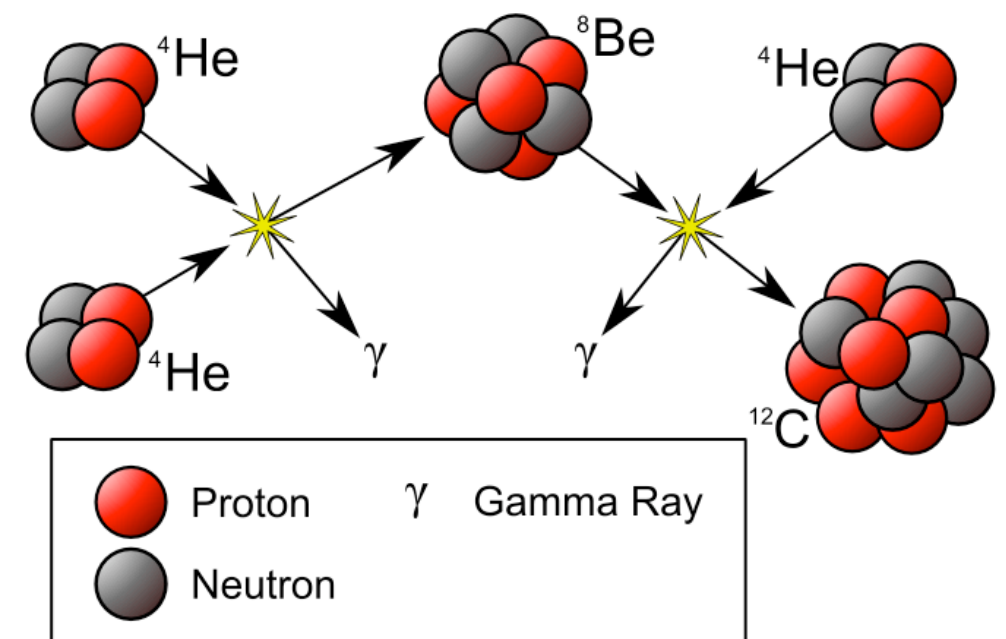
=> Zentraltemperatur und zentraler Druck steigen, und kompensieren das gestiege Molekulargewicht im neuen hydrostatischen Gleichgewicht

- Für Sterne mit $M > 0.5M_{\odot}$ steigt die Temperatur auf $\approx 10^8$ K, und das **He-Brennen** beginnt:



- mit einer Energiegewinnung von 7.2 MeV

(Für Sterne mit $M < 0.5M_{\odot}$ verhindern die degenerierten Elektronen die Kontraktion noch bevor das He-Brennen starten kann)



Helium-Brennen

- Der triple- α Prozess erfordert die Produktion von ${}^8\text{Be}$ als Zwischenschritt:



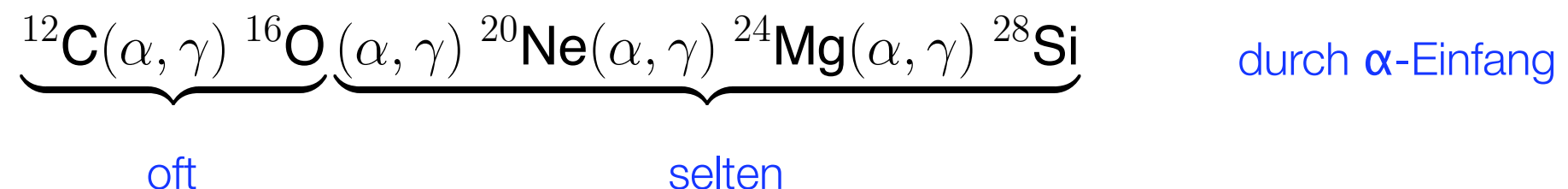
- Die Produktion von ${}^8\text{Be}$ ist endothermisch, und die Lebensdauer des ${}^8\text{Be}$ Grundzustandes ist $\approx 10^{-16}\text{s}$ (${}^8\text{Be} \rightarrow 2\alpha$, auch Grund für den “Massengap” bei $A=8$); dh ${}^{12}\text{C}$ wird nur dann produziert, falls ein ${}^4\text{He}$ -Kern “sofort” zur Verfügung steht:



- Abgesehen von den hohen T , muss auch die ${}^4\text{He}$ -Dichte ausreichend sein ($>100\text{g cm}^{-3}$) \rightarrow keine C-Erzeugung im Big Bang. Die T -Anhängigkeit der Energieerzeugung im triple- α Prozess ist:

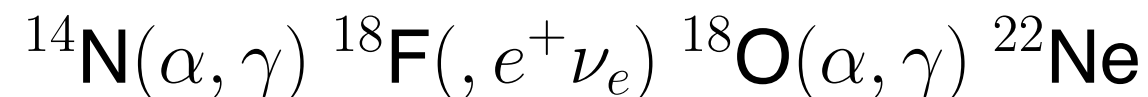
$$\epsilon_{3\alpha}(T) \approx \rho^2 T^{30} \quad \text{dramatische } T\text{-Anhängigkeit!}$$

- abgesehen davon können noch folgende Reaktionen während des He-Brennens stattfinden

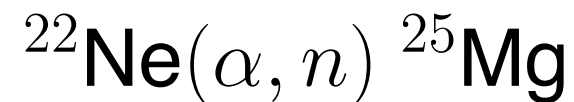


Helium-Brennen

- Dies erklärt, warum die kosmische Häufigkeit von C und O die höchste nach H und He ist, und auch die Tatsache, dass alle weiteren Prozesse auf der Fusion von C und O beruhen
- Für Temperaturen etwa oberhalb 10^8K , können folgende Reaktionen stattfinden:



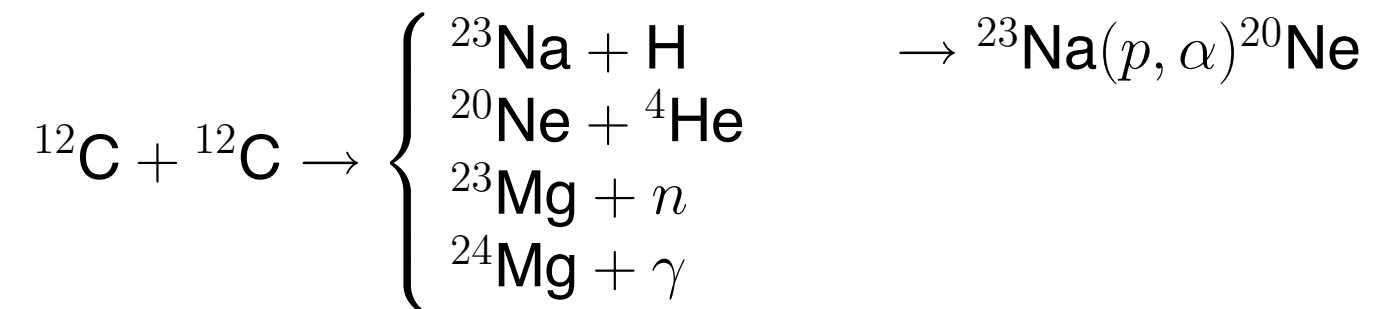
- und



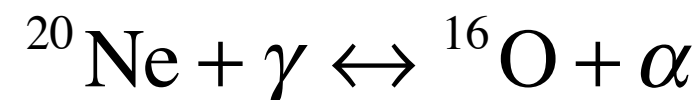
- wobei die letztere wichtig ist, da sie die **freien Neutronen** für die Synthese der Elemente mit $A > 60$ produziert. Diese Elemente können nicht durch den Einfang von geladenen Teilchen entstehen, da ihre Coulomb-Barriere zu hoch ist.
- Die Synthese der schweren Elemente erfolgt durch langsamen Neutronen-Einfang, im s-Prozess (s von “slow”), und durch schnellen Neutronen-Einfang im r-Prozess (r von “rapid”, nur in Supernova Explosionen)

Kohlenstoff-Brennen

- Wenn das He im Kern weitgehend verbrannt ist und T_C und P_C erhöhen sich weiter (nicht für Sterne aller Massen möglich!), können höhere Brennprozesse stattfinden
- bei $T_C > 6 \times 10^8 \text{K}$: Kohlenstoffbrennen



- mit $\epsilon(T) \propto \rho T^{32}$
- Es folgt Neon-Brennen bei $T_C \geq 10^9 \text{K}$:

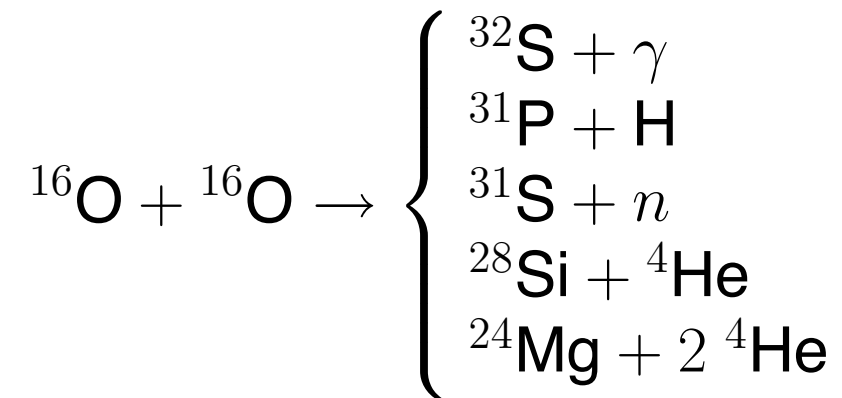


- (Gleichgewicht zwischen Produktion und Photo-Desintegration)
- Das ^{16}O reagiert wie folgt:

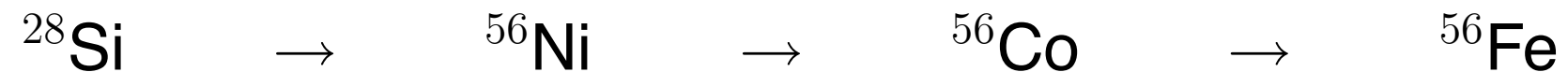


Sauerstoff- und Silizium-Brennen

- Bei $T \approx 2 \times 10^9$ K kann das Sauerstoff-Brennen starten:



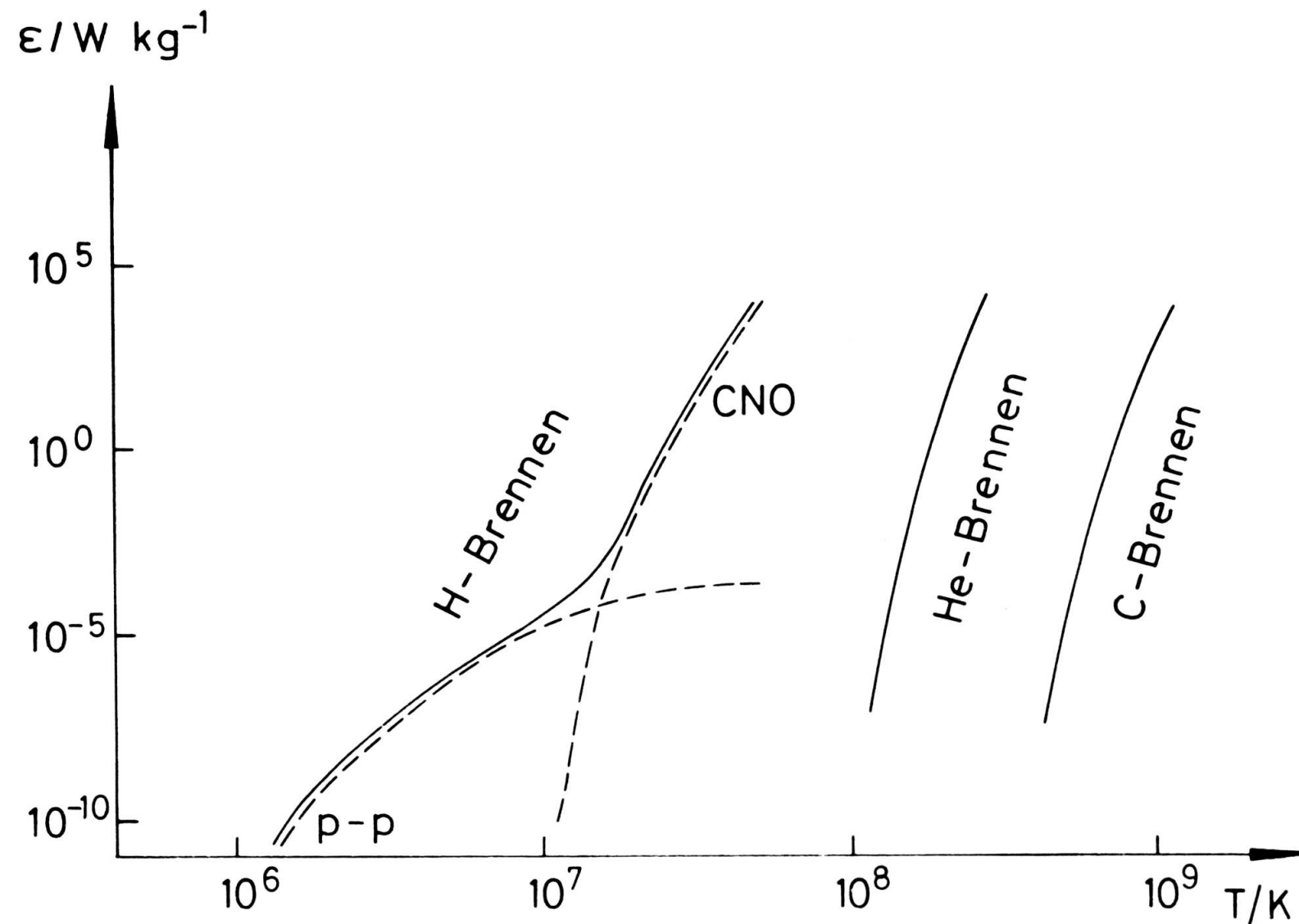
- Die letzte Brennphase wird mit dem **Silizium-Brennen** bei $T \approx 4 \times 10^9$ K erreicht. Dabei werden alle Elemente bis hinauf zu Eisen produziert:



- Mit der Synthese von Kernen der Eisengruppe endet die Möglichkeit eines massiven Sterns, Energie zu produzieren (da die Bindungsenergie pro Nukleon danach fällt).
- => das Sterninnere kollabiert zu einem Neutronenstern oder einem schwarzen Loch, was zu einer Supernova Explosion führt

Energieerzeugungsraten als Funktion der Temperatur

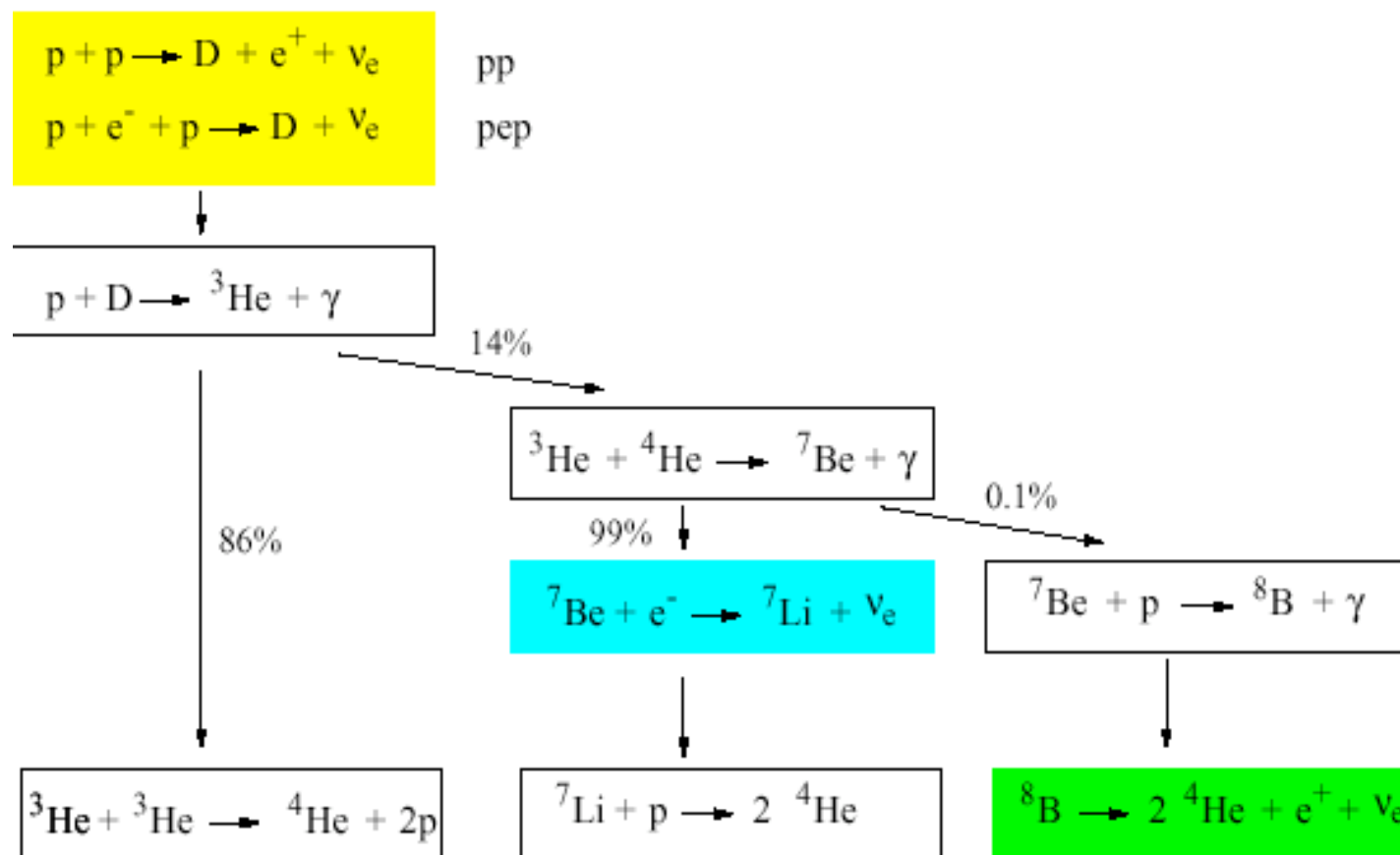
- Abhängigkeit der Energieerzeugungsrates ϵ von der Zentraltemperatur



sehr steiles $\epsilon(T)$ bei hohen Temperaturen => Energie kann oft nicht schnell genug abtransportiert werden => explosionsartiges Verhalten möglich!

Solare Neutrinos

- pp-Kette



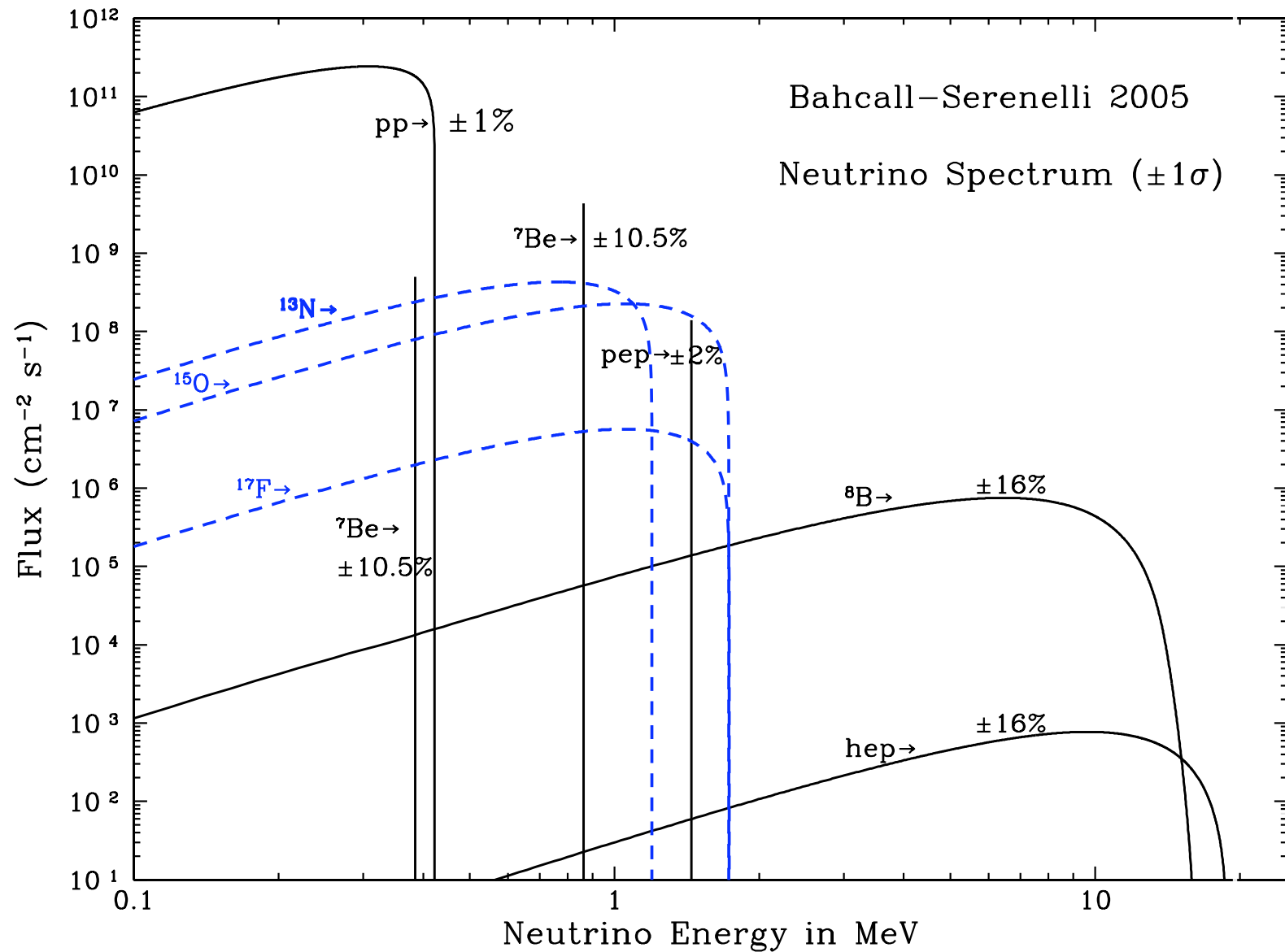
Vorhergesagte Neutrino-Flüsse

Source	Flux ($10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$)
<i>pp</i>	$5.9(1 \pm 0.01)$
<i>pep</i>	$0.014(1 \pm 0.02)$
<i>hep</i>	$8(1 \pm 0.2) \times 10^{-7}$
${}^7\text{Be}$	$0.49(1 \pm 0.12)$
${}^8\text{B}$	$5.8 \times 10^{-4}(1 \pm 0.23)$
${}^{13}\text{N}$	$0.06(1 \pm 0.4)$
${}^{15}\text{O}$	$0.05(1 \pm 0.4)$
${}^{17}\text{F}$	$6(1 \pm 0.4) \times 10^{-4}$

- Messung der Neutrino Flüsse können die Sonnenmodelle testen
- Mit $\sigma_\nu \sim 10^{-43} \text{ cm}^2$ ist die mittlere freie Weglänge in der Sonne $l_\nu = (n \cdot \sigma_\nu)^{-1} = 10^{17} \text{ cm}$ ($n =$ Teilchendichte im Zentrum der Sonne $\sim 10^{26} \text{ cm}^{-3}$) \Rightarrow direkte Beobachtung des solaren Reaktors!

Das Sonnenneutrino-Spektrum

Vorhergesagtes Spektrum im Standard Solar Model (SSM)



<http://www.sns.ias.edu/~jnb/>

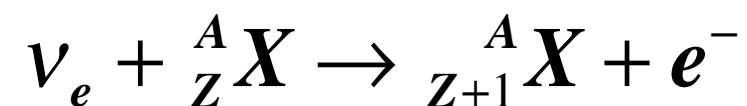
Parameter des SSM

	$t=4.6 \times 10^9$ yr	$t=0$
L	$\cong 1$	0.71
R	696000 km	605500 km
T_s	5773 K	5665 K
T_c	15.6×10^6 K	-
ρ_c	148 g cm^{-3}	-
X(H)	34.1%	71%
Y(He)	63.9%	27.1%
Z	1.96%	1.96%

Experimente

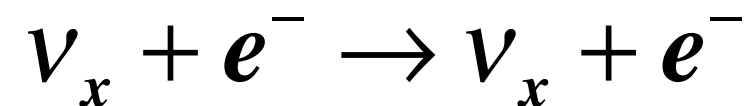
- Da σ_ν sehr klein (E-abhängig!), werden bei ν -Flüssen $\approx 10^{10} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ etwa 10^{30} Targetatome für die Detektion von 1 Ereignis/Tag benötigt!
- 2 prinzipielle Arten von Experimenten:

radiochemische Experimente



Tochterkern muss instabil sein, und mit einer 'vernünftigen' T1/2 zerfallen. Zerfall wird zur Detektion benutzt.

'Echtzeit' Experimente, wobei die elastische Neutrino-Elektron-Streuung ausgenutzt wird:



das gestreute Elektron wird nachgewiesen; die Richtung des Elektrons und des Neutrinos sind korreliert:

$$\theta \leq \left(\frac{2m_e}{E_\nu} \right)^{1/2}$$

Das Homestake-Experiment

- Das erste Sonnenneutrino Experiment, lief für 20 Jahre seit 1978. Die verwendete Reaktion ($E_{\text{th}} = 814$ keV) ist:



- Die Detektionsmethode benutzt den Zerfall ($T_{1/2} = 35$ d):



615 t C_2Cl_4 (Tetrachlorethylen) \Rightarrow **2.2×10^{30} ${}^{37}\text{Cl}$ -Atome**
die Ar-Atome werden alle 60-70 Tage extrahiert (durch Spülen mit He-Gas); Ar wird konzentriert und in speziellen Proportionalzählern nachgewiesen

- **Vorhersage SSM: (7.1 ± 1.0) SNU**

$$1 \text{ SNU} = 10^{-36} \text{ Einfänge}/(\text{Targetatom s})$$

- **Messung: (2.56 ± 1.6) SNU**

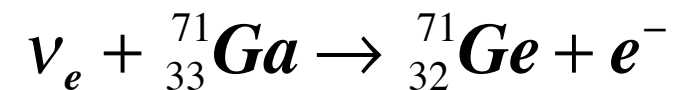
\Rightarrow das Sonnenneutrino-Problem!



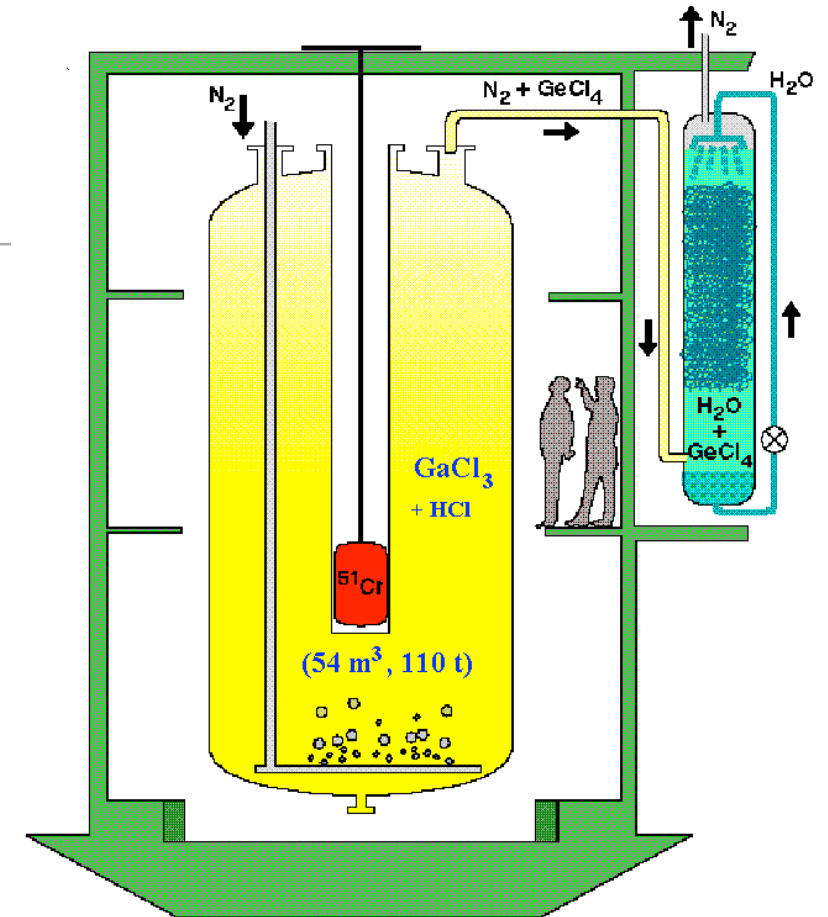
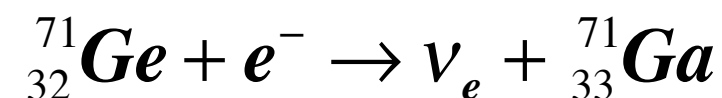
Gallium-Experimente

- GALLEX/GNO und SAGE

- Die Nachweisreaktion ($E_{\text{th}} = 233 \text{ keV} \Rightarrow$ auch pp-Neutrinos!):



- Das ${}^{71}\text{Ge}$ zerfällt mit $T_{1/2} = 11.4 \text{ d}$, durch Elektroneinfang:



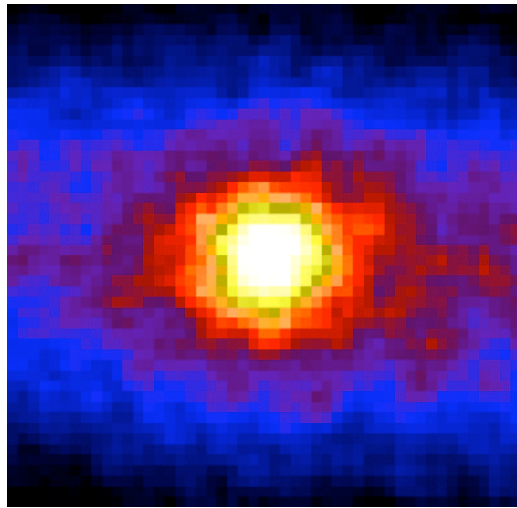
- GALLEX/GNO: am Gran Sasso Labor
- GALLEX: 30 t Ga in 110 t GaCl_3 Lösung (10^{29} ${}^{71}\text{Ga}$)
- SAGE: Baksan, 57 t metallisches Ga

- Vorhersage SSM: (129 ± 8) SNU
- Messung (Mittelwert über viele Jahre)
 (70.8 ± 4.5) SNU



Super-Kamiokande

- Echtzeit Experiment: Information über Zeit und die Richtung des Neutrinos
- Direkter Nachweis, dass Neutrinos von der Sonne kommen!

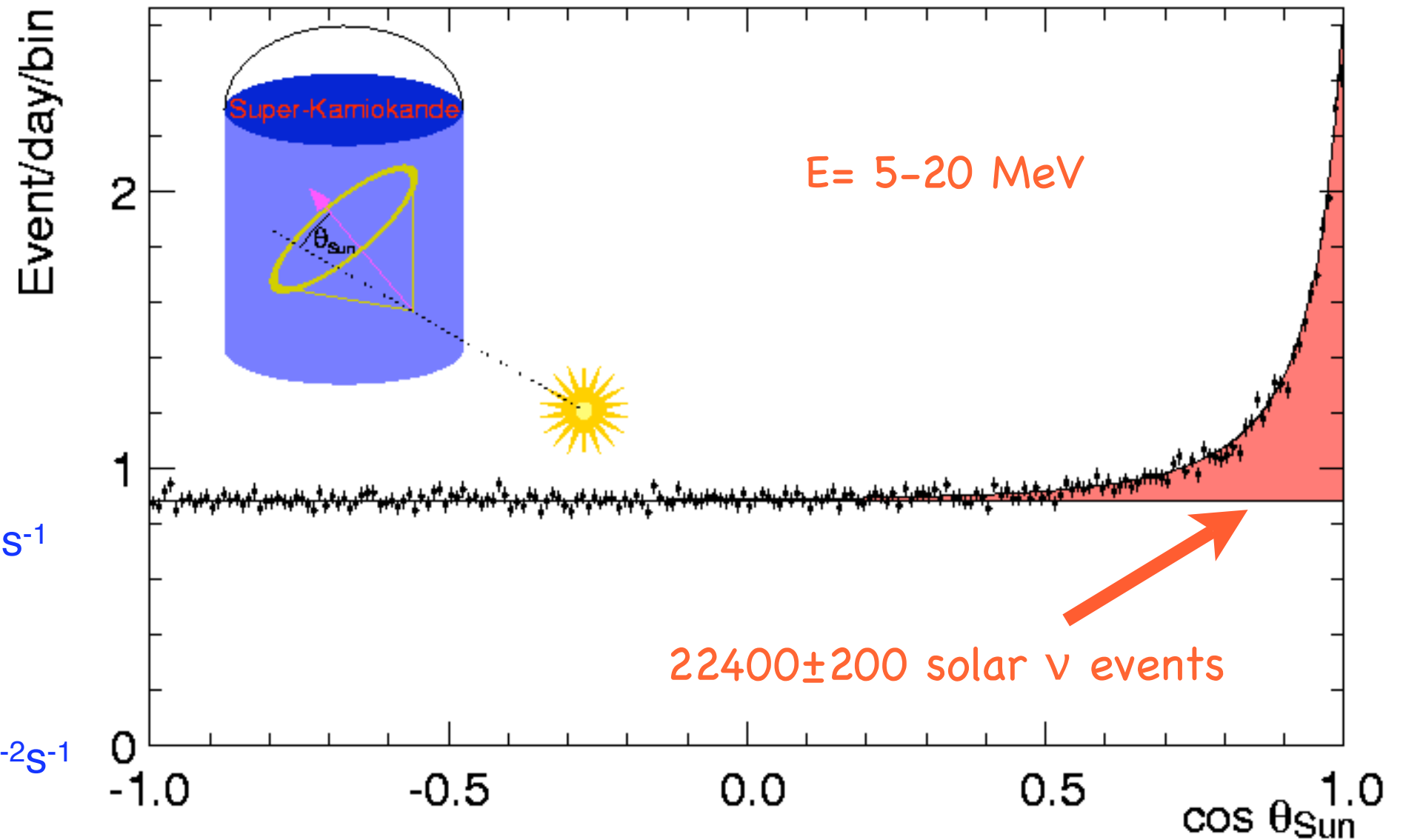


Vorhersage SSM:

$$(5.05 \pm 0.2) \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Messung

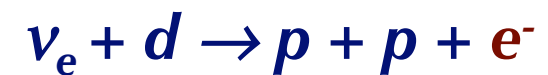
$$(2.35 \pm 0.08) \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$



Das SNO Experiment

- Cerenkov Detektor, mit 10^3 t schweres Wasser (D_2O), 9700 PMTs und 7300 t Wasser-Abschirmung; $E_{th}=5$ MeV
- Nachweis-Reaktionen:

Charged-Current (CC):



Neutral-Current (NC):



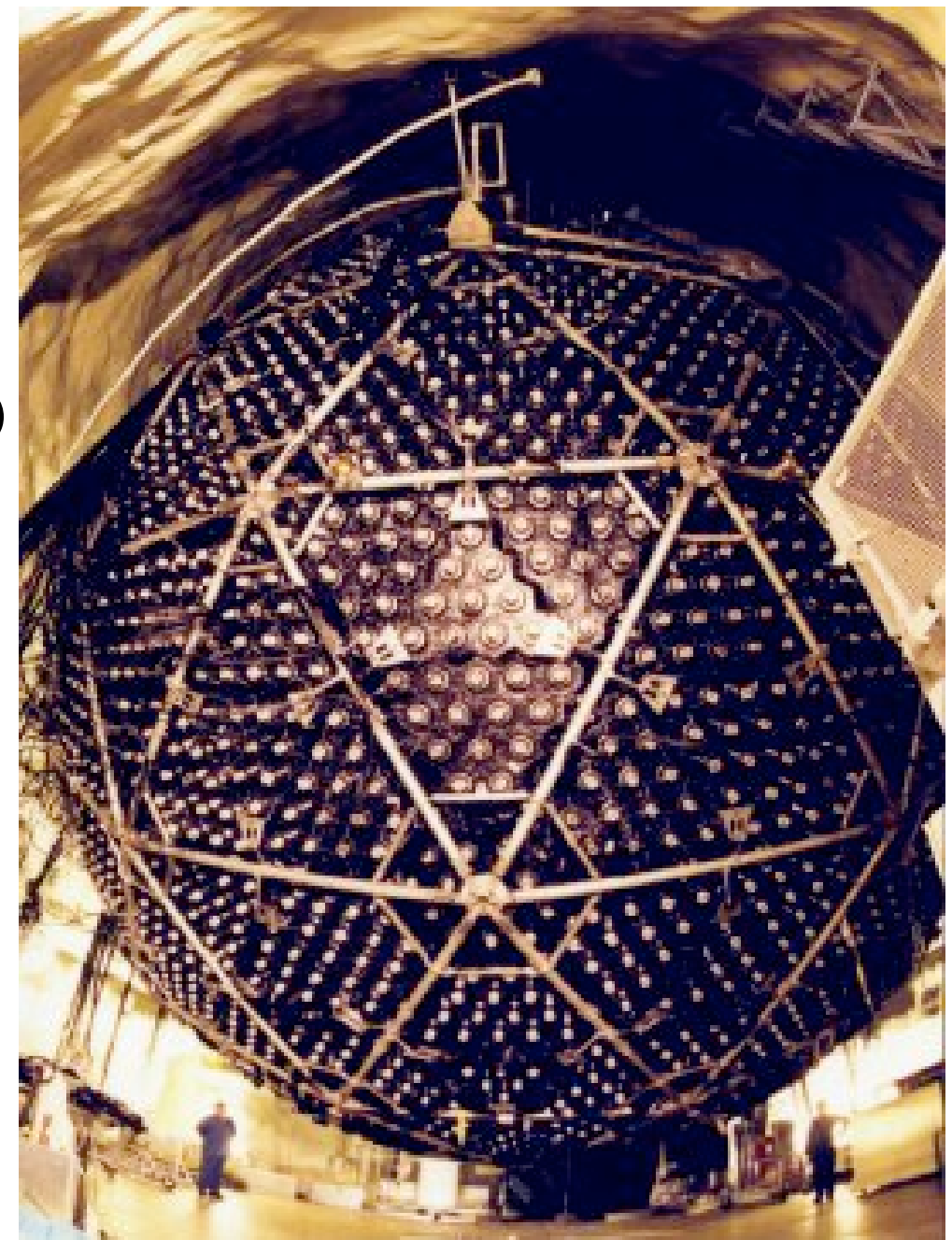
Elastic Scattering (ES):



$$\nu_e$$

$$\nu_e + 0.15(\nu_\mu + \nu_\tau)$$

$$\nu_e + \nu_\mu + \nu_\tau$$



CC Fluß: $\phi^{CC} = [1.75 \pm 0.07 \text{ (stat)} \pm 0.11 \text{ (syst)}] \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

ES Fluß: $\phi^{ES} = [2.39 \pm 0.34 \text{ (stat)} \pm 0.15 \text{ (syst)}] \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

NC Fluß: $\phi^{NC} = [5.21 \pm 0.27 \text{ (stat)} \pm 0.38 \text{ (syst)}] \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

NC Fluß: gute Übereinstimmung mit SSM:
=> erste direkte Evidenz, dass Neutrino-Oszillationen stattfinden

Standard-Sonnenmodell vs. Experimente

Total Rates: Standard Model vs. Experiment
Bahcall-Serenelli 2005 [BS05(OP)]

