Astronomie und Astrophysik II, SS 2007

Übungsblatt 15 (Besprechung am 10. Mai 2007)

1. Man könnte vielleicht argumentieren, dass das Gesetz für den Strahlungsfluss F, gemessen in einem Abstand r von der Quelle:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

eine Lösung für Olber's Paradoxon liefern würde. Um zu sehen, dass dies nicht der Fall ist, betrachten Sie eine gleichmäßige Sternverteilung mit n Sternen pro Volumeneinheit, jeder Stern mit einer Leuchtkraft L. Stellen Sie sich vor, dass 2 dünne, sphärische Stern-Schalen mit Radien r_1 und r_2 auf der Erde zentriert sind, jede Schale mit einer Dicke Δr. Zeigen Sie, dass von jeder Schale aus der gleiche Energiefluss die Erde erreicht. Was schliessen Sie daraus?

2. Nehmen Sie an, dass die gesamte baryonische Materie im Universum in Energie konvertiert werden könnte, in Form einer Schwarzkörperstrahlung. Was wäre die Temperatur des Universums in diesem Fall? Bei welchen Wellenlängen würde die Schwarkörperstrahlung ihr Maximum zeigen? Wie können Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit Olber's Paradoxon anwenden? Nehmen Sie die WMAP mittlere baryonische Materie-Dichte im Universum an:

$$\rho_{b,0} = 4.17 \times 10^{-28}\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$$

3. Nehmen Sie ein vereinfachtes Modell für das Universum an: ein Universum, das mit einem drucklosen "Staub" mit gleichmäßiger Dichte ρ(t) gefüllt ist. In diesem Modell ist das Universum isotrop und homogen auf allen Skalen. Zeigen Sie, unter Verwendung allein der Newtonschen Gravitationstheorie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\left[\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho\right]a^2 = -kc^2$$

wobei a(t) = Skalenfaktor, und k = Konstante, die die Geometrie des Universums bestimmt; k, mit der Dimension von $[\text{Länge}]^{-2}$ ist so definiert, dass die gesamte Energie einer spärischen Staubschale

$$E = -\frac{1}{2} mkc^2 r^2(t_0)$$

mit $r(t_0)$ = Radius der Schale zum heutigen Zeitpunkt t_0, und $r(t)=a(t)\times r(t_0)$ gilt. Was ist die Formel für die kritische Dichte $\rho_c(t)$ in diesem Universum?

4. Für das obige Modell des Universums, zeigen Sie dass

a) für die Dichte in Einheiten der kritischen Dichte gilt:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} = 1 + \frac{kc^2}{(da/dt)^2}$$

Diese Formel beschreibt die Zeitentwicklung von $\Omega(t)$. Was sagt sie über die Natur des frühen Universum aus?

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{da}{dt} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad t \rightarrow 0$$

Was sagt dies über den Unterschied zwischen einem geschlossenen, flachen und einem offenen Universum bei sehr frühen Zeiten t aus?

5. Unter der Annahme, dass die heutige Dichte der baryonischen Materie durch

$$\rho_{b,0} = \rho_b(t_0) = 4.17 \times 10^{-28} \text{kg m}^{-3}$$

gegeben ist (h = 0.71), was war die Dichte der baryonischen Materie zur Zeit der primordialen Kernsynthese (Temperatur $T \sim 10^{10}$ K)? (Hinweis: T_0 =2.725 K; wie ändern sich der Skalenfaktor, und die Materie-Dichte mit der Zeit?).

6. Der Deuterium Kern D ist nur schwach gebunden.

a) Berechnen Sie die Bindungsenergie aus m_H = 1.007825 u, m_n= 1.008665 u und m_D=2.014102 u.

b) Was ist die Wellenlänge eines Photons dieser Energie?

c) Berechnen Sie aus dem Wienschen Gesetz, bei welcher Temperatur dies die charakteristische Energie eines Schwarzkörperstrahlungs-Photon ist.

c) Nehmen Sie eine Temperatur des Universums von $T = 10^9$ K an und zeigen Sie, dass bei dieser Temperatur alle Protonen mit Neutronen kombinieren würden, um He-Kerne zu bilden. (Hinweis: betrachten Sie ein Neutron mit einem Kollisions-WQ von $\sigma=(2r)^2\pi$, das sich mit einer Geschwindigkeit v durch eine Protonendichte n_p bewegt. In einem Zeitintervall Δt wird es $n_p \sigma v \Delta t$ Kollisionen geben, wie groß ist diese Zahl? Nehmen Sie für $\Delta t = t_{rad}$ = 179 s an).