

Übungsblatt 16 (Besprechung am 14. Juni 2007)

1. Leiten Sie die Gleichung für die Beschleunigung der Expansion her:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) a$$

2. Betrachten Sie ein Modell des Universums, das aus neutralen Wasserstoffatomen mit mittlerer (rms) Geschwindigkeit von 600 km/s besteht. Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\rho \gg \frac{P}{c^2}$$

für das Gas gilt. Im Falle eines adiabatisch expandierenden Universums, für welche Werte von a und z ist:

$$\rho = \frac{P}{c^2}$$

3. Zeigen Sie, dass in dem drucklosen-“Staub“-Modell des Universums für den Abbremsparameter gilt:

$$q(t) = \frac{1}{2} \Omega(t)$$

4. Betrachten Sie eine mitbewegte Sphäre dessen Oberfläche mit dem Universum expandiert. Die Sphäre soll im Ursprung zentriert, und mit CMB Photonen gefüllt sein. Zeigen Sie, dass die Gleichung:

$$a^4 \rho_r(t) = \rho_{r,0}$$

mit der Energieerhaltung in der Sphäre konsistent ist (a ist der Skalenfaktor und $\rho_{r,0} = \rho_r(t_0)$).

5. a) Lösen Sie die Friedmann-Lemaître-Gleichung für ein ein-komponentiges Universum, das aus relativistischen Teilchen besteht.

Hinweis: benutzen Sie folgende Beziehungen:

$$\rho_r = \frac{u_r}{c^2}; u_r = \frac{1}{2} g_* T^4; g_* = 3.363$$

wobei u_r die Energiedichte und g_* die effektive Anzahl der Freiheitsgrade für relativistische Teilchen sind.

b) Zeigen Sie, dass dieses Universum flach ist im Limit $z \rightarrow \infty$.

Hinweis: gehen Sie von der Gleichung

$$H^2[1 - (\Omega_m + \Omega_r)]a^2 = -kc^2$$

aus und benutzen Sie die Beziehung:

$$a^4 \rho_r(t) = \rho_{r,0}$$

6. Nehmen Sie an, die Erde sei eine perfekte, glatte Sphäre. Falls Sie einen Kreis mit Radius $R = 100$ m auf der Erdoberfläche zeichnen würden, was ist der Unterschied zwischen dem erwarteten und dem gemessenen Wert des Kreisumfangs?

Hinweis: der Radius der Erde ist $R_{\text{Erde}} = 6.378136 \times 10^6$ m und für kleine x gilt:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

7. Leiten Sie die Beziehung für $\Omega(z)$ aus der Vorlesung her:

$$\Omega(z) = 1 + \frac{\Omega_0 - 1}{1 - \Omega_0 + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2} + \Omega_m (1+z) + \Omega_r (1+z)^2}$$

Wie sieht diese Beziehung für

$$\Omega_r = 0; \Omega_\Lambda = 0$$

aus?

8. He-Kerne wurden bei einer Temperatur $T \approx 10^9$ K und bei $t \approx 178$ s gebildet.

a) was war der Skalenfaktor zu dieser Zeit?

b) wie gross war die Horizont-Distanz (der Durchmesser der kausal verbundenen Region), als das Universum 178 s alt war?

c) wie gross ist diese Region heute? (in pc; nehmen Sie ein flaches Universum an)

d) vergleichen Sie mit der gegenwärtigen Horizont-Distanz

e) was schliessen Sie daraus?