

Einführung in die Kern- und Teilchenphysik I

Stichworte zur Kursvorlesung im WS 2001/2002

U. Straumann, Universität Zürich

7. Februar 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Konzepte	9
1.1	Einleitung: Qualitative Übersicht	9
1.1.1	Zur Geistesgeschichte der elementaren Teilchen und Kräfte	9
1.1.2	Teilchen und Wechselwirkung im Standardmodell	16
1.1.3	Zusammengesetzte Teilchen	28
1.1.4	Grenzen des Standardmodells?	29
1.1.5	Exkurs: natürliche Einheiten	30
1.1.6	Teilchen am Anfang des Universums	31
1.2	Teilchen, Symmetrie und Erhaltungssätze	33
1.2.1	kontinuierliche Symmetrien und Erhaltungssätze	33
1.2.2	diskrete Raum- und Zeitsymmetrieen	36
1.2.3	Teilchen, Antiteilchen und die C – Parität	38
1.2.4	Flavourquantenzahlen	42
1.2.5	Eigenschaften elementarer Teilchen und ihre Messung	43
2	Werkzeuge	45
2.1	Wie arbeitet der exp. Teilchenphysiker?	45
2.1.1	Wirkungsquerschnitt und Lebendauer	45
2.1.2	Kinematik I	47
2.1.3	Streumatrix und Feynmanregeln	49
2.1.4	Vom Matrixelement zum Wirkungsquerschnitt	54
2.1.5	Streuexperimente und Resonanzproduktion	56
2.2	Beschleuniger	58
2.3	Detektoren	61
2.3.1	Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie	61
2.3.2	Spurdetektoren	64
2.3.3	Kalorimeter	66
2.3.4	Konzepte grosser Teilchenphysikexperimente	67
3	Wechselwirkungen	69
3.1	Elektromagnetische WW	69
3.2	schwache Wechselwirkung I	70
3.2.1	Der β Zerfall	70
3.2.2	Der direkte Nachweis der W Bosonen	74
3.2.3	Neutrino - Kernstreuung und CC bei HERA	75

3.2.4	W^+W^- – Produktion bei LEP	76
3.2.5	Der Zerfall geladener Pionen	76
3.3	Starke Wechselwirkung	77
3.3.1	Gluonen und Quarks	77
4	Tiefunelastische Streuung	79
4.1	Strukturuntersuchung an komplexen Objekten	79
4.1.1	Elastische Streuung	80
4.1.2	Unelastische Streuung	82
4.1.3	Beispiel	84
4.2	Messung der Streuparameter bei HERA	85
4.3	Strukturfunktionen	87
4.3.1	Elektromagnetische Wechselwirkung	87
4.3.2	Partonmodell	89
4.3.3	Schwacher Geladener Strom: W Austausch	90
4.3.4	Schwacher Neutraler Strom: Z_0 Austausch	93
4.4	Partondichten in der QCD	94
4.4.1	Generelle Aussagen	94
4.4.2	Altarelli - Parisi - Gleichungen	95
4.4.3	Messung von F_2	98
4.4.4	Messung von F_L	98
4.4.5	Bestimmung der Gluonsdichte	98
4.4.6	Bestimmung von α_s	99
5	Kernphysik und Kernreaktoren	101
5.1	Die Kernmassen und ihre Häufigkeit	101
5.2	Das Tröpfchenmodell	101
5.3	Der α - Zerfall	101
5.4	Das Deuteron	101
5.5	Das Fermigasmodell	101
5.6	Das Schalenmodell	102
5.7	Reaktorphysik	102
5.7.1	Kernspaltung und Spaltneutronen	102
5.7.2	Neutron - Absorbtion	102
5.7.3	Kettenreaktion und Reaktortypen	102
5.7.4	Moderator und Kühlmittel	102
5.7.5	kritischer Zustand und Reaktor-Regelung	102

Literaturverzeichnis

Einführende Textbücher zur Phänomenologie der Teilchenphysik:

[Berg99] Lars Bergström and Ariel Goobar: *Cosmology and Particle Astrophysics*, John Wiley, 1999.

Brilliant, aktuelle Zusammenfassung der Kosmologie und der dafür relevanten Aspekte der Teilchenphysik. Ein Lesegenuss!

[Frau99] H. Frauenfelder, E.M. Henley: *Teilchen und Kerne*, 4. Auflage, Oldenbourg 1999.

Eine leider nur teilweise aktualisierte Übersetzung des Klassikers von Frauenfelder/Henley: *Subatomic Physics*, von 1991.

[IOP98] G. Fraser (Edt.): *The Particle Century*, Institut of Physics Publishing, 1998.

Sammlung von einführenden Artikeln zu älteren und aktuellen Teilchenphysikthemen berühmter Persönlichkeiten wie Rubbia, Schwitters, Kendall, Ali, Altarelli, John Ellis und anderen. Die Artikel geben teilweise sehr schöne Übersichten, und versuchen leicht verständlich zu sein, was unterschiedlich gut gelingt.

[Lohr92] E. Lohrmann: *Hochenergiephysik*, Teubner Studienbücher Physik, 1992.

Relativ billiges Taschenbuch.

[Mart92] B.R. Martin, G. Shaw: *Particle Physics*, John Wiley 1992.

Guter phänomenologischer Überblick, leicht lesbar. Manchmal etwas sehr oberflächlich.

[NRC98] National Research Council: *Elementary Particle Physics*, National Academy Press, Washington, USA, 1998.

Sehr qualitativ, aber umfassend.

[Per91] D.W. Perkins: *Hochenergiephysik*, Addison-Wesley, 1991.

Deutsche Übersetzung und teilweise Nachführung des englischen Klassikers von 1987.

- [Povh95] B. Povh, K. Rith, C. Scholz und F. Zetsche: *Teilchen und Kerne*, Springer 1995.

Basierte ursprünglich auf dieser Vorlesung Physik VI in Heidelberg, mehrere Male aktualisiert.

- [Will01] W.S.C. Williams: *Nuclear and Particle Physics*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 2001.

Modernes Lehrbuch mit vielen grafischen Hilfsmittel. Klare Darstellung der Definitionen und Begriffe. Als ständige Begleitlektüre zu dieser Vorlesung empfohlen. Sollte im Irchel-Studentenladen an Lager sein.

Weiterführende Literatur

- [Aitch82] I. Aitchison, A. Hey: *Gauge Theories in Particle Physics*, Adam Hilger 1982.

Einführung in die Eichtheorien für Fortgeschrittene. Die Formalismen werden sehr gut erklärt.

- [Berg75] H. Gobrecht *Bergmann Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band IV, Teil 2, Walter de Gruyter Verlag Berlin, 1975.

- [Gott86] Kurt Gottfried, Victor F. Weisskopf: *Concepts of Particle Physics*, Oxford University Press, 1986.

Besteht aus 2 Bänden. Der erste enthält die übliche Einführung, der zweite baut darauf auf, und erklärt sehr gut die QED, Hadronspektroskopie, QCD, DIS und Elektroweak – Theorie, mit auch für Experimentatoren nachvollziehbarem Formalismus.

- [Kugo97] T. Kugo: *Eichtheorie*, übersetzt aus dem japanischen von Stefan Heusler, Springer 1997.

Vollständiges Textbuch, vor allem für theoretisch Interessierte.

- [Halz84] F. Halzen, A. D. Martin: *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley, 1984.

Der Klassiker unter den Textbüchern für Teilchenphysiker.

Spezielle Referenzen für HERA-Physik

- [Felt87] J. Feltesse: *Measurement of Inclusive Differential Cross Sections*, in Proceedings of the HERA Workshop, edited by R.D. Peccei, Hamburg 1987. Vol. 1, page 33.

- [Ing87] G. Ingelmann et al.: *Deep Inelastic Physics and Simulation*, in Proceedings of the HERA Workshop, edited by R.D. Peccei, Hamburg 1987. Vol. 1, page 3.

- [Bent91] S. Bentvelsen et al., in *Physics at HERA*, Proc. edited by W. Buchmüller and G. Ingelmann, Hamburg 1991, Vol. 1, page 23.
- [xstrich] in *Proceedings of the HERA Workshop*, edited by R.D. Peccei, Hamburg 1987. Vol. 1, page 153.
- [Cash95] R. J. Cashmore et al. in *Future Physics at HERA* Proc. edited by G. Ingelmann et al., Hamburg 1995, Vol 1, page 170.
- [H1e-] H1 Kollaboration, hep-ex/0012052.
- [H1LowQ²] H1 Kollaboration, DESY 00-181.
- [Rob90] R. G. Roberts: *The structure of the proton*, Cambridge Monographs, 1990.
- [Ball94] Ball and Forte, 1994.

Nachschlagewerk

- [PDG00] Particle Data Group: *Review of Particle Physics*, Eur. Phys. J. **C15**, 1-878 (2000).

Vollständiges Nachschlagewerk aller bekannten Daten und gute Zusammenfassungen der theoretischen Grundlagen. Wird alle 2 Jahre publiziert. Auch unter <http://pdg.lbl.gov> mit regelmässigen Aktualisierungen.

Detektorbau

- [Leo94] W.R. Leo: *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer 1994.

Kapitel 1

Konzepte

1.1 Einleitung: Qualitative Übersicht

1.1.1 Zur Geistesgeschichte der elementaren Teilchen und Kräfte

Atome und Elemente

24. Okt. 01

Thales von Milet lebte ca. 600 v.Chr. Er wird meist als der erste naturwissenschaftliche Denker im heutigen Sinne gefeiert. Von ihm werden die ersten Versuche überliefert, Beobachtungen durch rationale Erklärungen auf Grundelemente zurückzuführen.

Es gab zwar schon viel länger Erkenntnisse, die wohl auf einer Art wissenschaftlicher Arbeit beruhen mussten. Denken Sie nur an die prähistorischen Kultstätten, die oft astronomisch ausgerichtet sind. Stonehenge ist auf den Aufgangspunkt der Sonne zur Tag- und Nachtgleiche ausgerichtet, aber auch Wintersonnenwende, Einrichtungen zur Vermessung des Mondes in seiner nördlichsten und südlichsten Deklination. Dies erforderte eine langjährige vorausgehende Beobachtung. Vor allem aber setzt dies die Einsicht voraus, dass Extrapolationen von beobachteten Phänomenen in die Zukunft sinnvolle Resultate liefern können.

Die ältesten schriftlichen Aufzeichnungen von Himmelsbewegungen stammen aus *Mesopotamien* und gehen bis zu 3000 v.Chr. zurück. Seit dem 4.Jhd v.Chr. gibt es in Babylon *Planetenephemeriden*. Damals waren die babylonischen Astronomen in der Lage Mondphasen und Mondfinsternisse vorauszuberechnen, allerdings noch keine Sonnenfinsternisse. Diese Eigenschaft einer Theorie, dass sie nämlich auch Voraussagen machen kann, die überprüfbar sind, gehört heute zur selbstverständlichen Anforderung an jede Theorie kognitiver Wissenschaften.

Aber nun zurück zu Thales. Auf ihn gehen die ersten uns bekannten Gedanken zurück, die zur Idee führten, dass es etwas *Fundamentales* geben muss, aus dem alles hergestellt

ist. Thales soll postuliert haben, dass das Wasser das *Element* ist, aus dem alles hergestellt ist. Wasser ist die fundamentale Wesenheit aus dem alles besteht. Schriften von Thales sind allerdings keine erhalten.

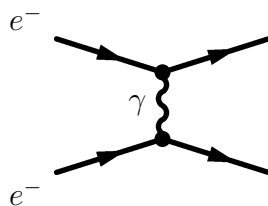
Anaximander, ein Schüler von Thales, findet noch weitere elementare Bausteine: Es braucht auch Erde, Feuer und Luft zusätzlich, damit man alles aufbauen kann.

Das Wort *atomos* ($\alpha\tau\omicron\mu\omicron\sigma$) geht auf Demokrit zurück. Das 'Unzerteilbare' bezeichnet die kleinsten Bausteine der Materie, aus denen alles zusammengesetzt sei, auch die Seele, die aus feinsten Atomen bestehe. Zur damaligen Zeit galt: **Die Atome sind ewig, ungeworden und unzerstörbar**. Sie sind von Ewigkeit her in Bewegung, nur nach Gestalt und Grösse, Anordnung und Lage verschieden.

Der Geist dieser Definition beschreibt gar nicht so schlecht, was wir heute unter dem Begriff *Elementarteilchen* verstehen. Die folgenden Beispiele geben nur einen anschaulichen Eindruck, die verwendeten Begriffe werden später in der Vorlesung exakter definiert.

Nach heutigem Verständnis ist die Materie aus den elementaren Teilchen Quarks und Leptonen aufgebaut. Protonen und Neutronen bestehen aus Quarks, wovon es zwei Typen gibt: *up* Quarks (elektr. Ladung $+2/3$), *down* Quarks (elektr. Ladung $-1/3$). Leptonen kommen ebenfalls in zwei Typen mit einer um 1 unterschiedlichen elektrischen Ladung vor: Elektronen (Ladung -1) und Neutrinos (elektrisch neutral). Die "Lebenslinien" werden im Raumzeitdiagramm dargestellt.

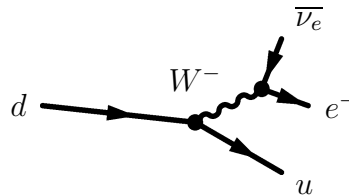
Beispiel: Ein Elektron streut an einem anderen Elektron durch elektromagnetische Wechselwirkung. In der Quantenfeldtheorie betrachten wir die Wechselwirkung als kleine Störung, sodass man Störungsrechnung anwenden kann. Die Wechselwirkung findet dann durch Austausch eines kleinsten Quantums der Wechselwirkung statt. Im elektromagnetischen Fall werden diese Quanten Photonen genannt. Dieser Sachverhalt wird durch sogenannte *Feynmanngraf*en im Raum-Zeit-Diagramm dargestellt:



Dabei denkt man sich die Zeitachse von links nach rechts, die Ortsachse (eine Koordinate) von unten nach oben.

Quarks und Leptonen sind beides Fermionen, das heisst sie besitzen Spin $1/2$, und unterstehen dem Pauli'schen Ausschlussprinzip. Quark oder Lepton - Linien in Feynmann Diagrammen können zwar ihre Eigenschaften ändern. Sie sind aber offenbar unzerstörbar, auch wenn sie möglicherweise ihre Richtung in der Zeit umdrehen und zum Antiteilchen werden, wie im nächsten Beispiel. In diesem Sinne sind sie ungeworden, ewig und unzerstörbar, wie die antiken Atome.

Ein anderes Beispiel ist der *Neutronzerfall* $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ durch die schwache Wechselwirkung: Das Neutron besteht ja aus drei (Valenz-)quarks, nämlich aus *up, down, down*: *udd*. Ein *d* verwandelt sich nun in ein *u* Quark unter Aussendung eines *W* Bosons, dem Träger der schwachen Wechselwirkung (analog dem Photon). Diese zerfällt in ein Elektron und ein Antineutrino:



Es bleiben also neben den beiden unbeteiligten Quarks *u* und *d* noch ein *u* Quark übrig. Wir haben also ein Proton im Endzustand.

An diesem Beispiel lernten wir neu Antiteilchen kennen: Antifermionen werden in den Feynmandiagramm als in der Zeit rückwärtslaufende Teilchen dargestellt. Am *W* Vertex wird das rücklaufende Neutrino zu einem Elektron.

Nach den üblichen grafischen Konventionen werden Fermionen durch ausgezogene Linien, Träger der Wechselwirkungen (Bosonen) durch Wellenlinien (Spin 1) oder gestrichelte Linien (Spin 0) dargestellt.

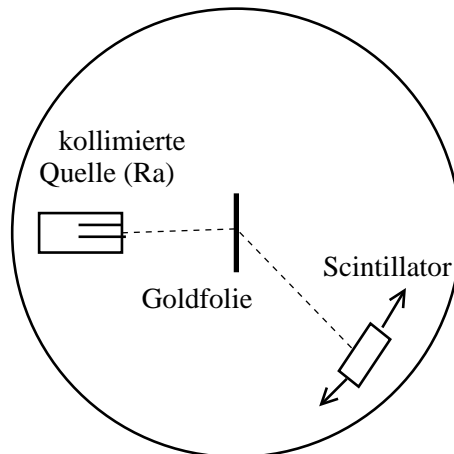
Nach moderner Auffassung gibt es als elementare Bestandteile der Materie also die beiden Fermiontypen Quarks und Leptonen. Sie üben aufeinander Kräfte aus, indem sie Bosonen als Wechselwirkungsquanten austauschen. Die modernen “Elemente” sind also die Quarks und Leptonen einerseits und die Wechselwirkungsquanten der vier fundamentalen Kräfte der schwachen, elektromagnetischen, starken Wechselwirkung und der Gravitation andererseits.

Theorien elementarer Teilchen

1808 führt Dalton den Begriff atom in die Chemie ein, wo er sich bekanntlich als sehr fruchtbar erwies, und schliesslich zur Mendeleev’schen periodischen Tabelle der chemischen Elemente führte. Diese Theorie kann man als erste Elementarteilchen – Theorie im modernen Sinne verstehen. Sie war auch in der Lage, neue Elemente erfolgreich vorauszusagen.

Natürlich wissen wir aber längst, dass die chemischen Atome nicht unzerlegbar sind, und dass es noch kleinere Elementarteilchen gibt.

Von Rutherford (1871-1937) stammt das Streuexperiment von α Strahlung an Metallfolie (1911). Wäre die Ladung im Atom gleichmässig verteilt, würde es nur kleine Ablenkungen geben. Die beobachtete ‘Rückwärtsstreuung’ kann es nur geben, wenn es einen sehr kleinen, aber schweren geladenen Kern gibt.



Die α Teilchen (also He^4 Kerne) streuen an den Atomen der Goldfolie. Sie erzeugen im Szintillator durch Anregung von Atomen Lichtblitze, die mit Hilfe eines Mikroskopes von Auge beobachtet und gezählt wurden.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der gestreuten Elektronen als Funktion des Winkels kann durch eine rein klassische Rechnung erklärt werden, was Rutherford persönlich sehr gefiel: Man berechne die Ablenkung θ ("Streuwinkel") eines geladenen Teilchens mit Ladung $Z'e$ und Energie E im elektrischen Feld einer Punktladung Ze , als Funktion vom Stossparameter b , der die Distanz angibt, mit dem das Teilchen an der Punktladung vorbeifliegen würde, wenn es keine Wechselwirkung gäbe. In einem zweiten Schritt berechnet man die Häufigkeit, mit der Teilchen in eine bestimmte Richtung abgelenkt werden, wenn man annimmt, dass diese homogen verteilt einfallen. Diese Häufigkeit nennt man den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$, wir erhalten (siehe Übungen):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(ZZ'e^2)^2}{(4E)^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

wobei $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ das Raumwinkelement bezeichnet. Der charakteristischen Winkel- und Energieabhängigkeit werden wir noch verschiedentlich begegnen.

Ist der Kern nicht punktförmig, so wird die Rutherford'sche Streuformel durch den "Formfaktor" modifiziert. Eine Messung des Formfaktors erlaubt die Analyse der Ladungsverteilung des Streuzentrums, somit die Bestimmung der Grösse der Atomkerne. Das Resultat der Versuche zeigt, dass das Verhältnis Bohrradius / Kernradius $\approx 10^5$ ist.

Um den Aufbau der Elektronenschale des Atoms zu verstehen, brauchte es dann allerdings die Quantenmechanik. Die erste Version des Borhmodells stammt von 1913, die Schrödingergleichung wurde hier an unserem Institut 1926 aufgestellt.

Atomkerne bestehen ja aus Neutronen und Protonen. Neutronen wurden erstmals durch Chadwick 1932 identifiziert, an Hand eines Experimentes, indem α auf Be Kerne geschossen wurden. Dabei entsteht C plus ein freies Neutron. Das Jahr 1932 war sowieso

sehr bedeutungsvoll: Anderson entdeckte mit dem Positron das erste Antimaterie - Teilchen, wie von Dirac vorausgesagt. In der gleichen Zeit wurde die Theorie des β Zerfalles von Fermi formuliert, die schwache Wechselwirkung wurde erstmals erwähnt, und Pauli sagte das Neutrino voraus.

Bald kamen aber noch neue Teilchen dazu. Pionen, andere Mesonen, Myonen, Schwerere Baryonen usw, vorerst noch in kosmischer Strahlung, später auch aus Beschleuniger Experimenten. Anfang der 60er Jahre waren mehrere hundert Teilchen bekannt, und die Teilchenphysiker kamen sich vor wie Botaniker, die versuchten Ordnung in eine grosse Zahl verschiedener Formen zu bringen.

1964: Gell-Mann und unabhängig davon Zweig bemerkten, dass man fast den ganzen Teilchenzoo durch damals nur drei fundamentale Fermionen beschreiben konnten, nämlich je ein *up* ($+2/3e$), ein *down* ($-1/3e$) und ein *strange* ($-1/3e$) *Quark*. p: *uud*, n: *udd*, Mesonen: $q\bar{q}$. Es galt allerdings nur als - allerdings erfolgreiches - mathematisches Modell, da keine freien Quarks gesehen wurden. Daneben brauchte es als fundamentale Teilchen aber immer noch die Elektronen, die Neutrinos und die Myonen.

1968: Feynmann stellt das Partonmodell auf: Elektronstreuung an Kernen (also im Prinzip das Rutherfordexperiment, aber mit viel höheren Energien) zeigte nämlich ein Verhalten, das mit drei punktförmigen Teilchen innerhalb der Protonen konsistent war. Diese Punkte wurden *Partonen* genannt.

1974 wurde der $J/\psi = c\bar{c}$ Zustand entdeckt, in Brookhaven und Stanford gleichzeitig. Diese Entdeckung war völlig unerwartet, und trotzdem ist sie praktisch gleichzeitig in zwei Experimenten erfolgt. Die spannende Entdeckungsgeschichte kann zum Beispiel im Bericht eines Beteiligten nachgelesen werden (Roy Schwitters: *Unexpected Windfall*, [IOP98], page 70.)

Damit existiert offenbar ein viertes Quark, das *charm* ($+2/3e$) Quark. Es hat eine Masse von etwa 1.4 GeV und ist somit schwerer als ein Proton. Von nun an wurden die Quarks als etwas physikalisch reelles betrachtet, und die Partonen wurden mit den Quarks identifiziert. Ausserdem wurde klar, dass es sowohl Leptonen als auch bei den Quarks in verschiedenen Familien gibt.

In den folgenden 10 Jahren wurden eine Unmenge neuer Teilchen entdeckt, die durch die schweren Quarks *c* und *b* (dritte Familie) gebildet werden.

Das letzte Quark, das *top* wurde erst nach langjähriger Suche 1995 gefunden, beim Fermilab bei Chicago und zwar bei viel höherer Masse als erwartet.

Es gibt also eine ganze Serie von Elementarteilchen – Theorien, die sich mit der Zeit entwickelt hat, und die zu immer neuen noch elementareren Teilchen geführt hat, die nach dem jeweiligen Verständnis der ursprünglichen Definition von 'atomos' ewig, ungeworden und unzerstörbar sind. Leider ist das Wort Atom nicht mit dieser Geschichte der Erkenntnis mitgewandert, sondern in der Chemie hängen geblieben. Schade!

So müssen wir uns halt mit dem Begriff *elementum* (lateinisch Grundstoff) zufrieden geben. Dieser scheint jeweils mit der aktuellen Theorie mitzuwandern. So werden Feuer,

Erde, Wasser und Luft, die Anaximander als fundamentale Bausteine postulierte, in der Literatur stets als ELeMente bezeichnet. Ebenso gibt es die chemischen Elemente und eben die Elementarteilchen.

Kräfte

Bisher haben wir nur elementare Teilchen betrachtet. Nach unserem heutigen Verständnis sind aber die Kräfte, die zwischen diesen elementaren Teilchen wirken, teil der fundamentalen Systeme. Man geht sogar noch einen Schritt weiter: Die Existenz der Teilchen ist nur eine weitere Auswirkung von Symmetrieprinzipien, die den Kräften zugrundeliegen. So beschreibt die elektroschwache Wechselwirkung zum Beispiel, warum es nicht nur ein Lepton, sondern eben ein Paar mit Ladungsdifferenz 1, also ein Elektron und ein Neutrino gibt. Ebenso bei den u und d Quarks.

Historisch gesehen, ist allerdings die Erkenntnis der Dynamik eines Systems wesentlich jünger. Newton hat uns durch die Interpretation einer Serie von Beobachtungen durch Galilei, Brahe und Kepler das Gravitationsgesetz und den Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung gegeben:

$$F \propto a \qquad m_T := \frac{F}{a}$$

Seit dem 20. Jahrhundert wissen wir erst, dass Kräfte durch Felder übertragen werden, die selber eine physikalische Realität darstellen, und nur mit endlicher Geschwindigkeit sich ausbreiten: Seit Maxwell sind die elektrischen und die magnetischen Effekte durch eine einheitliche Theorie der Maxwell - Gleichungen beschrieben. Diese Vereinheitlichung ermöglicht einen neuen Effekt: Auch im Vakuum sich ausbreitende elektromagnetische Wellen. Diese Felder sind quantisiert, die Quantenfeldtheorie beschreibt ihr Verhalten in der Welt der elementaren Teilchen, dabei stellen die Feldquanten selber wieder Teilchen dar. Die Quanten der elektromagnetischen Strahlung nennen wir Photonen γ .

Bis heute kennen wir 4 fundamentale Kräfte, auf die wir alle Dynamik zurückführen können. Elementarteilchenphysik handelt immer auch von den Kräften zwischen den elementaren Teilchen. Die Feldquanten werden ebenfalls zu den elementaren Teilchen gerechnet.

Elementarteilchenphysik und Kosmologie

Die älteste Naturwissenschaft ist die Astronomie. Doch zusammen mit dieser, besonders der Kosmologie, der Wissenschaft von der Entstehung und Entwicklung des Kosmos, haben auch die ersten Gedanken an die Existenz elementarer Teilchen begonnen. Heute wird die Elementarteilchenphysik oft als die fundamentalste aller Wissenschaften bezeichnet. Sie befasst sich mit der Frage, "was die Welt im innersten zusammenhält".

Die Elementarteilchenphysik liefert zusammen mit der allgemeinen Relativitätstheorie die Grundlagen der Kosmologie. Die Entwicklung des Weltalls kurz nach dem Urknall ist durch elementare Teilchen dominiert. In der allerersten von unserer Physik beschreibbaren Phase besteht die Welt aus einer sehr heissen Suppe aller elementaren Teilchen, deren Dynamik durch die Elementarteilchenphysik beschrieben. Mit der Zeit verschwindet der grösste Teil gewisser Teilchen, oder sie koppeln sich vom thermodynamischen Gleichgewicht aus.

Die Anwendungen der Teilchenphysik in der Astrophysik heisst auch Astroteilchenphysik. Die Verbindung der fundamentalen Fragen nach den Teilchen und Kräften mit der Kosmologie finde ich das faszinierendste Gebiet der Wissenschaft.

Ich werde in dieser Vorlesung an geeigneter Stelle jeweils Exkurse in die Kosmologie und die Astroteilchenphysik machen.

Theorie und Experiment

Abschliessend zu diesem historischen Exkurs möchte ich noch feststellen, dass der Begriff des atomos oder des elementum, also das Postulat eines kleinsten existierenden Grundteilchens lange vor unserem heutigen Verständnis der wissenschaftlichen Forschung geschaffen wurde. Er entstand nur durch Nachdenken. Heute verlangen wir von jeder Theorie, dass sie experimentell nachprüfbar ist. In der Tat finden wir heute im Experiment solche elementare Teilchen! Das finde ich total faszinierend und sogar ein bisschen unheimlich.

Solche Effekte, dass eine durch Nachdenken geschaffene Theorie Voraussagen macht, die später tatsächlich in der Natur beobachtet werden, gibt es in der Teilchenphysik oft. Ein besonders klassisches Beispiel in neuerer Zeit dazu ist die Existenz der W -Bosonen, oder des Top Quarks. Damit knüpfen wir an die babylonische Fähigkeit an, die Mondfinsternisse vorauszusagen. Was wird wohl der Astronom gefühlt und gedacht haben, nachdem die von ihm zum erstenmal vorausberechnete Mondfinsternis tatsächlich eingetreten ist?

In diesem Zusammenhang ist es interessant festzustellen, dass etwa die Hälfte der fundamentalen Teilchen völlig überraschend und rein zufällig entdeckt wurden so zum Beispiel das Myon, das c Quark und das τ Lepton, während die anderen durch theoretische Modelle vorhergesagt wurden so z.B. das Neutrino (durch Pauli; Energie- und Drehimpulserhaltung), das b Quark (dritte Generation nach der Entdeckung des τ erwartet) und die W Bosonen (elektroschwache Theorie). Deshalb ist es immer wieder spannend, einen neuen Beschleuniger in Betrieb zu nehmen, man weiss nie, was man neues entdecken könnte!

Physik ist eine kognitive Wissenschaft, in ihrem Zentrum steht immer die Beobachtung der Natur, das Experiment. Modellvorstellungen, Theorien oder Hypothesen werden aufgestellt, um die beobachteten Phänomene in einen grösseren

Zusammenhang zu stellen. Dabei herrscht besonders das Bedürfnis, eine *Theorie* logisch konsistent aus möglichst wenig Grundannahmen (“Axiomen”) aufzubauen. In der heutigen Zeit sind das meistens *Symmetrieprinzipien*: Der Raum und die physikalischen Gesetze sollen sich nicht ändern, wenn man z.B. Spiegelungen, Translationen oder Rotationen durchführt. Leider taucht in der Öffentlichkeit immer wieder die absurde Behauptung auf, dass die Mathematik die Physik erkläre!

1.1.2 Teilchen und Wechselwirkung im Standardmodell

25. Okt.01

In diesem Kapitel soll das sogenannte *Standardmodell* der Teilchenphysik direkt nach heutigem Verständnis eingeführt werden. Das ist umgekehrt als bei praktisch allen existierenden Lehrbüchern, die den historischen Zugang wählen.

Im Standardmodell der Teilchenphysik werden 24 fundamentale Teilchenzustände beschrieben:

- *Quarks* und *Leptonen*: (2)
- treten je als Paare auf: u, d und e, ν : ($\times 2$)
- in drei *Familien* oder *Generationen*: z.B. e, μ, τ : ($\times 3$)
- als *Teilchen* und *Antiteilchen* ($\times 2$)

Die Theorie beschreibt drei *Wechselwirkungen*, die auf diese Teilchen wirken. Sie verwendet für alle Wechselwirkungen der gleichen Formalismus (nicht abelsche Eichtheorien), aber unterschiedlichen Konstanten: Die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung.

Alle übrigen Teilchen werden als durch die starke Kraft *gebundene Zustände* beschrieben. Es gibt

- *Baryonen*: qqq , zum Beispiel Proton = uud
- *Antibaryonen*: \overline{qqq} , zum Beispiel Antiproton.
- *Mesonen*: $q\bar{q}$. zum Beispiel $\pi^+ = u\bar{d}$, $K^+ = u\bar{s}$

Gebundene Zustände der elektromagnetischen Wechselwirkung sind Atome und Moleküle, sowie Kristallgitter. Durch die schwache Wechselwirkung gebundene Zustände sind nicht bekannt.

Elementare Teilchen: Quarks und Leptonen

Es gibt je zwei Zustände von Quarks bzw. Leptonen mit Ladungsunterschied 1. u : $+2/3$, d : $-1/3$, e : -1 , ν : 0 . Man schreibt

$$Q_{el} = T_3 + Y \quad \text{wobei} \quad T_3 = \pm \frac{1}{2} \quad (1.1)$$

wobei T_3 schwacher Isospin und Y die *schwache Hyperladung* genannt wird. Letztere beträgt für die linkshändigen (siehe unten) Komponenten der Quarks $1/6$ und der Leptonen $-1/2$. Schwach' weil die Aufspaltung von der schwachen Wechselwirkung erzeugt wird. (siehe Eichtheorien). Y ist also die für die Teilchenart Quarks oder Leptonen die charakteristische Quantenzahl. T_3 spaltet die Teilchen auf. Das ist etwa so wie beim Zeemann Effekt: Die atomaren Linien werden bei Anwesenheit eines externen Magnetfeldes aufgespalten, und zwar gemäss der Spinquantenzahl m . Bei den Quarks und Leptonen spaltet die Existenz der elektroschwachen Wechselwirkung die Zustände auf.

Es handelt sich um Fermionen, das heisst Spin = $1/2$ (es gilt das Pauliprinzip). Betrachten wir die Forpflanzungsrichtung, als die Richtung des Impulsvektors \vec{p} als Quantisierungsachse, dann gibt es offensichtlich zwei Eigenzustände: $m=+1/2$ und $m=-1/2$, also Spin \vec{s} parallel oder antiparallel zu \vec{p} . Man spricht von Helizität oder von der Händigkeit (nach der Rechte-Hand Regel für den Drehimpulsvektor). Die Teilchen kommen in zwei *Helizitätszuständen* vor: Linkshändig und Rechtshändig.

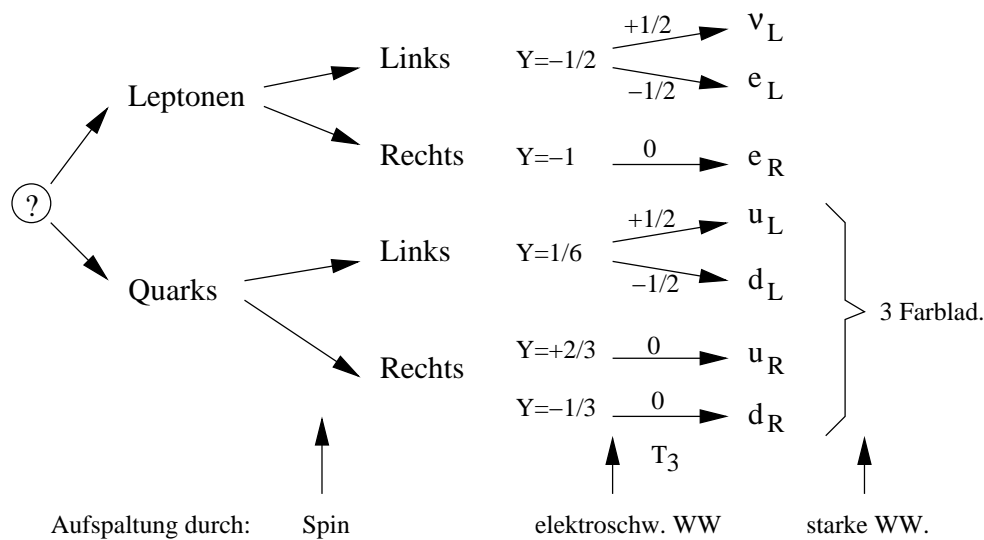
$$\text{Eigenzustände der Helizität:} \quad h := \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| |\vec{p}|} = \pm 1 \quad (1.2)$$

Spezialität: Das Neutrino scheint es nur linkshändig zu geben. Warum wissen wir allerdings nicht. Die schwache Wechselwirkung wirkt allgemein nur auf linkshändige Komponenten (also $h = -1$) der Quarks und Leptonen. Die rechtshändigen Komponenten der Quarks und des Elektrons haben deshalb $T_3 = 0$ und somit auch andere Hyperladungen Y .

Zusammenfassung (siehe untenstehende Figur):

- Es gibt zwei Sorten von fundamentalen Fermionen: Quarks und Leptonen. Warum wissen wir nicht.
- Es gibt von jedem Fermion zwei Helizitätszustände. Diese Spin-Aufspaltung wird durch die Forderung nach einer Erhaltung unter Drehtransformationen in der Quantenmechanik erzeugt.
- Linkshändige Fermionen werden zusätzlich durch die elektroschwache Wechselwirkung mit einer elektrischen Ladungsdifferenz von 1 aufgespalten, es gibt Elektronen und Neutrinos, bzw. up und down Quarks.
- Alle Quarks kommen mit drei verschiedenen Quantenzahlen der starken Wechselwirkung vor, der sogenannten Farbladung.

- Schliesslich kommen alle Teilchen in drei Generationen vor. Das dahinterliegende Symmetrieprinzip kennen wir nicht. Jedoch braucht es mindestens drei Generationen, um sogenannte CP - Verletzung zu erzeugen: Eine Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie.



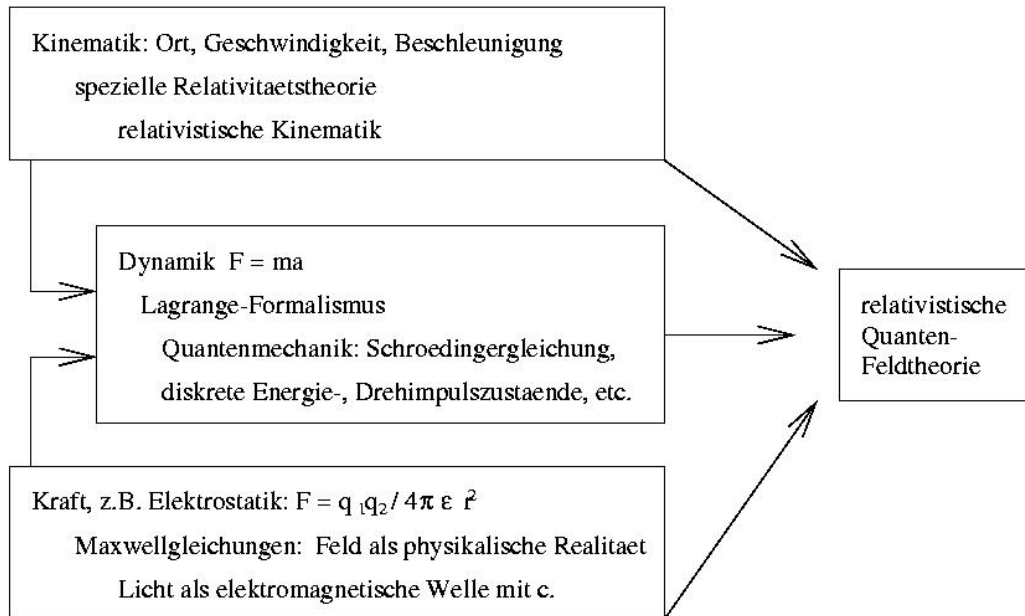
31.10.01

Wechselwirkungen: 3 Arten

Diese Teilchen wechselwirken miteinander. Dabei kommen im Standardmodell drei *Wechselwirkungen* vor. stark, elektromagnetisch, schwach. *Kräfte* werden durch *Kraftfelder* übertragen, die in der modernen Physik eine eigene Realität sind.

In der *Quantenfeldtheorie* (QFT) gibt es zwei wesentliche Modifikationen zur klassischen Physik: endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ($\leq c$), Quantisierung der übertragenen Energie (Feldquanten).

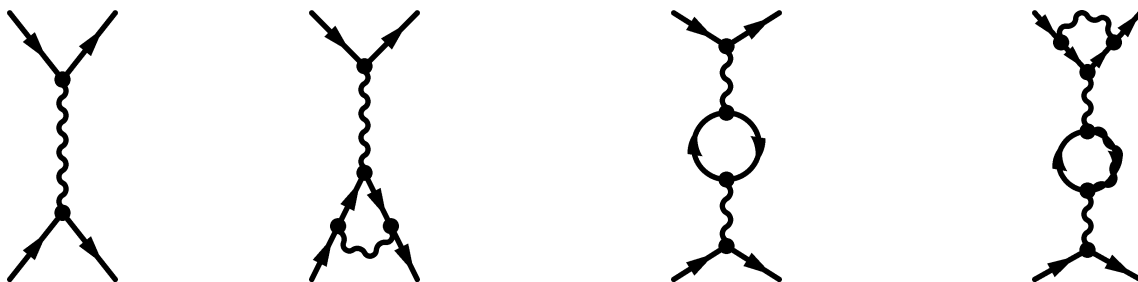
Evolution von Begriffen und Theorien im Umkreis der Wechselwirkungen



Die Feldquanten der el-magnetischen WW sind die *Photonen* γ . Sie sind masselos ($m < 2 \times 10^{-16}$ eV). Sie haben Spin 1 und sind also Bosonen. Die Stärke der elektromagnetischen WW hängt von der Ladung ab, sie ist an die elektrische Ladung Q_{el} gekoppelt. Wirkt also nur auf drei der 4 elementaren Teilchen.

Das *Feynmandiagramm* ist eigentlich grafische Darstellung des Formalismus der QFT. Genauer die **störungstheoretische Behandlung** dieser: Die WW ist eine kleine Störung für den Impuls der Fermionen. Stärkere Störungen bedeuten mehrere – viele Quanten. Skizze der e-e- Streuung: zweite Ordnung, dritte Ordnung. Das funktioniert nur, weil $\alpha \ll 1$. Wir werden oft davon Gebrauch machen.

Beispiele: Die Elektronstreuung. Links: Graf erster Ordnung. Mitte: 2 unterschiedliche Graphen zweiter Ordnung. Rechts: ein Beispiel eines Graphen dritter Ordnung.



Unschärferelation und virtuelle Teilchen: Die Linien in einem Feynmandiagramm,

die von aussen kommen, oder nach aussen gehen, heissen externe Linien. Sie stellen reelle Teilchen dar.

Die inneren Linien beginnen und enden innerhalb des Grafen und werden Propagatoren genannt, weil sie im allgemeinen Energie und Impuls übertragen. Diese Austauschquanten sind im allgemeinen *virtuelle Teilchen*. Um den Begriff virtuell besser zu verstehen, betrachten wir vorerst einmal Grafen mit nur einem Vertex: Ein Elektron strahlt ein Photon ab, es gibt also nur externe Linien. Dieser Prozess für sich allein genommen, verletzt Impuls- und Energieerhaltung (siehe Uebungen), solange die Ruhemasse mindestens eines der Teilchens nicht null ist.

1.11.01

(hier natürliche Einheiten vorziehen)

Gemäss der Unschärferelation kann aber die Impuls- und Energieerhaltung für kurze Zeit und bei kleinen Abständen verletzt werden. Deshalb sind die weiter oben gezeichneten Austauschgraphen erlaubt. Nach der Grundgleichung der SRT wird die Masse des Austauschteilchens

$$m^2 = E^2 - p^2 \quad (c = 1) \quad (1.3)$$

Falls $m^2 = m_0^2$ ($m_0 =$ Ruhemasse), heisst das Teilchen reell, sonst virtuell. Mit 4er Vektoren ausgedrückt:

$$q^\mu := (E, \vec{p}), \quad q_\mu := (E, -\vec{p}), \quad m^2 = q^2 = q_\mu q^\mu = E^2 - p^2 \quad (1.4)$$

Die Austauschteilchen zwischen massiven Fermionen sind also virtuelle Teilchen. Nach der Unschärferelation kann die Virtualität des Zwischenzustandes umso grösser werden, je kleiner dessen Lebensdauer ist. Bei grossen Geschwindigkeiten ist das gerade der Abstand zwischen den beiden Teilchen ($\hbar c = 1$):

$$q^2 = \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{R^2} \quad (1.5)$$

Daraus leuchtet unmittelbar ein, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Prozess mit einem Austauschquant der Virtualität q^2 stattfindet, proportional zu $1/q^2$ ist, dem sogenannten Propagator - Term (für Austauschquanten ohne Ruhemasse).

Kopplungskonstante: Zu jedem Vertex gibt es eine *Kopplungskonstante*, die die Stärke der Wechselwirkung angibt und der Ladung entspricht. Im elektromagnetischen Fall ist die Kopplungskonstante also die elektrische Ladung und man definiert

$$\alpha := \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \quad (1.6)$$

Es gibt also zu jeder Wechselwirkung eine fundamentale Naturkonstante. Sie steht in direkter Beziehung zu der entsprechenden "Ladung". (el. Ladung, Schwach: Schwacher Isospin, Stark: Farbe).

In allen QFT kann im Prinzip die Kopplungs'konstante' vom übertragenen Impuls abhängen, es wird $\alpha = \alpha(q^2)$.

In der elektromagnetischen WW ist diese Abhängigkeit relativ klein, aber im experimentell zugänglichen Bereich ist eine kleine Zunahme feststellbar: $\alpha(100\text{GeV}^2) \approx 1/128$ (Experimentelle Beobachtung: hep-ex/9908008).

In der QCD wird α_s mit grösserem Energieübertrag (kürzeren Abständen) kleiner. Man spricht von *asymptotischer Freiheit*. Bei kleinem q^2 wird die Kopplung sehr gross (bis die Störungsrechnung nicht mehr anwendbar ist), darum macht der Name “starke WW” Sinn.

Erinnerung an Spin und Statistik in der QM: Die Dynamik jedes Systems muss invariant sein unter der Vertauschung V zweier gleichen Teilchen in diesem System. Zwei aufeinanderfolgende Vertauschungen ergeben aber den Ursprungszustand: $V^2 = 1$. Also kann die Vertauschung nur entweder einer Multiplikation des Zustandsvektor mit +1 oder -1 entsprechen. Die Zustandsfunktion der Teilchen ist entweder symmetrisch oder antisymmetrisch. Entsprechend heissen die Zustände *Bosonen* und *Fermionen*.

In der relativistischen Quantenmechanik zeigt man, dass Fermionen immer halbzahligen Spin, Bosonen ganzzahligen Spin haben. – Für die Fermionen gilt das *Pauli Ausschlussprinzip*: Zwei oder mehr Fermionen derselben Art mit identischen Quantenzahlen können nicht den gleichen Zustandsvektor einnehmen: Lassen wir zwei identische Fermionen mit dem Abstandsvektor \vec{x} immer näher kommen ($\vec{x} \rightarrow 0$), wird

$$\psi'(-\vec{x}) = -\psi(\vec{x}) \quad \vec{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \psi' = -\psi$$

Der Zustand verschwindet also.

Aus der Drehimpulserhaltung folgt sofort, dass die Zahl der Fermionlinien an einem Vertex immer gradzahlig sein muss: Würde eine Fermionlinie nämlich an einem Vertex “aufhören”, so würde sich der Gesamtdrehimpuls um ein halb \hbar ändern, was nicht mit einer Bahndrehimpulsänderung aufgefangen werden kann (dieser kann nur ganzzahlige Werte annehmen).

7.11.01

Starke WW (Kernkräfte). Wirkt nur auf Quarks. Die “Ladung” der *starken Wechselwirkung* wird mit Farben gekennzeichnet. Es gibt drei verschiedene Typen (statt nur eine, wie in der QED): rot, grün, blau. Jedes Quark kommt also in einer von drei Farben daher. Das Quantum der starken Kraft heisst *Gluon*, hat ebenfalls Spin 1 und keine Masse. Die Theorie heisst deshalb *Quantenchromodynamik* (QCD).



Im linken Beispiel sieht man, dass die Farbe durch das Gluon ändert. Das Gluon trägt selbst Farbe! Die Summe der Farben bleibt aber erhalten, indem das Gluon die beiden Farbströme überträgt.

Da das Gluon selbst Farbe trägt kann es auch selbst mit einem anderen Gluon wechselwirken, bzw. ein solches abstrahlen. Man spricht von Gluon - *Selbstwechselwirkung* (rechtes Bild, “Triple Gluon Vertex”). Es gibt im ganzen 8 verschiedene Gluonen.

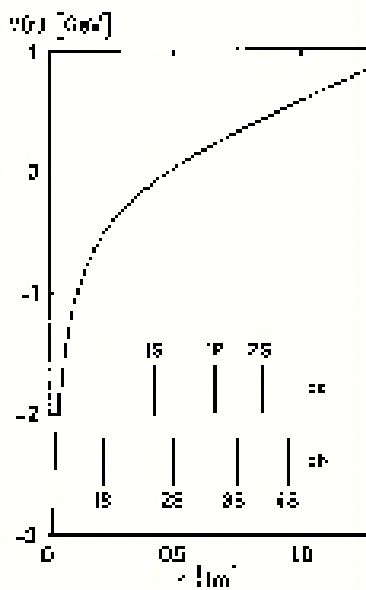
Die starke Kraft unterscheidet sich also erheblich von der elektromagnetischen: Sie hat keine Wirkung auf die Leptonen, und hängt nicht von der Quarkart (Quarkflavour) ab. Im Gegensatz zur Farbladung von Gluonen verschwindet die el. Ladung von Photonen $< 5 \times 10^{-30}$ (aus Frequenzänderungen von Pulsaren und dem dort herrschenden magnetischen Feld).

Bei kleineren Energien (grösseren Abständen) wird die starke Kraft noch stärker, bis schliesslich die Energiedichte genug gross ist, neue $q\bar{q}$ Paare zu erzeugen. Das ist etwa bei einem Protonradius ($1 \text{ fm} = (0.2 \text{ GeV})^{-1}$) der Fall. Dies führt zum sogenannten *Confinement*, das heisst es kann keine *freien Quarks* geben: Versucht man zum Beispiel eines der drei Quarks aus einem Neutron herauszuziehen, wird die Energiedichte irgendwann so gross, dass ein neues $q\bar{q}$ Paar entsteht. Das neue q ersetzt das Quark im Proton, und das \bar{q} tut sich mit dem herausgezogenen Quark zu einem Meson, zum Beispiel ein π^- , zusammen. Als Resultat erhält man also wieder zwei farbneutrale Zustände.

Das Confinement stellt auch die Motivation fuer das *Bagmodell* der Baryonen dar: Die Quarks sitzen in einem Potential- “bag” drin, wo sie nicht rauskönnen.

Im Proton drin gibt es ein starkes Kraftfeld, ein *Gluonsee*, aus dem laufend virtuelle Quark- Antiquark Paare entstehen. Man spricht von *Seequarks*.

Bei kleinen Abständen kann man das *starke Potential* rechnen, bei grossen Abständen kann man es aus dem gemessenen Energiespektrum der radialen Anregungen von $q\bar{q}$ - Systemen (*Quarkonia*) ableiten, ähnlich wie beim Wasserstoffatom.



Das Potential ist näherungsweise ([Povh95], page 170)

$$V \approx -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + k \cdot r \quad (1.7)$$

Vergleiche den Bohrradius $a = 1/\alpha \cdot m$ von Wasserstoff und Bottonium: m ist ein Faktor 10^4 grösser, α_s ein Faktor 10. Der Bohrradius ist also ein halber fm, statt ein halbes Angström.

Man spricht deshalb auch vom *Federmodell*: Die potentielle Energie zum Beispiel eines $q\bar{q}$ - Systems nimmt mit dem Abstand zu, und zwar steigt sie über alle Grenzen. Im Vergleich dazu wird die elektrostatische Energie zweier Punktladungen bei grossen Abständen flach. Aber das Potential einer mechanischen Feder (harmonischer Oszillator!) steigt ebenfalls über alle Grenzen, allerdings mit $V = kx^2/2$ noch wesentlich steiler als das Potential der starken Wechselwirkung. Wegen der qualitativen Ähnlichkeit dieses Potentials spricht man auch vom Federmodell. (siehe [Mart92], Seite 139.).

Beachte, dass bei grossen Abständen die Näherung $\alpha_s \ll 1$ nicht mehr gilt. Da versagt das ganze störungstheoretische Verfahren, und die Feynmandiagramme sind deshalb eigentlich nicht mehr anwendbar. In diesem Bereich braucht es kompliziertere Modelle, wie zum Beispiel Gittereichtheorien mit numerische Methoden.

Die **schwache Kraft** verbindet alle vier elementaren Teilchen miteinander. Sie kommt zum Beispiel im schon diskutierten β Zerfall vor.

Die Feldquanten der *schwachen Kraft* sind die W^\pm und Z^0 Bosonen. (haben Spin 1, sind Bosonen, wie es sich gehört).

Sie haben im Gegensatz zu Gluonen und Photonen eine erhebliche Masse ($M_W = 80\text{GeV}$, $M_Z = 91\text{GeV}$), deshalb sind alle schwachen Prozesse bei kleinen Energien unterdrückt und nur wegen der Heisenberg'schen Unschärferelation erlaubt: Die Energie ΔE des ausgetauschten Teilchens ist $\Delta E^2 = p^2 + M_W^2$ (natürliche Einheiten, $c = h/2\pi = 1$). Dies ist eine grosse Energie, die dadurch entstehende Verletzung der Energieerhaltung ist während einer maximalen Zeit von $\Delta t \cdot \Delta E < 1$ erlaubt. Es maximale Reichweite wird

$$R < \Delta t < \frac{1}{\Delta E} < \frac{1}{M_W} \quad (1.8)$$

Das Potential eines solchen Feldes wird durch das *Yukawa - Potential* dargestellt:

$$V(r) \propto \frac{e^{-r/R}}{r} \quad \text{mit} \quad R = \frac{1}{M_W} \quad (1.9)$$

(siehe auch erstes Übungsblatt). Für $M \rightarrow 0$ wird daraus das Coulombpotential für masselose Photonen, für $M \rightarrow \infty$ ergibt sich eine punktförmige Wechselwirkung.

Für $r \gg 1/M_W$ oder $q^2 \ll M_W^2$ wird die Wechselwirkung also sehr schwach. Daher der Name, und darum lebt das Neutron so lange und die Sonne brennt beruhigend langsam.

Die Kopplungskonstante für die Kopplung der W - Bosonen an ein Elektron - Neutrino Paar ist aber im Vergleich zur e.m. in der gleichen Grössenordnung, sogar etwas grösser:

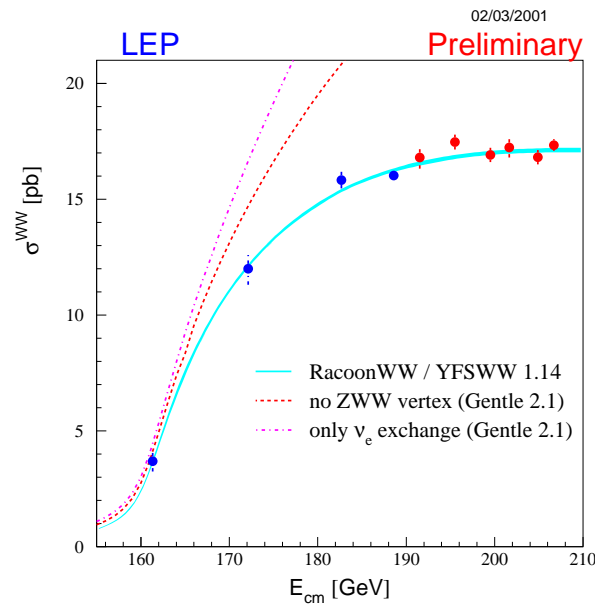
$$\alpha_W = \frac{g_W^2}{4\pi} \approx \frac{1}{55} \quad (1.10)$$

(siehe Lagrangian zum Beispiel in [\[PDG00\]](#), Seite 95: $g_W = e/(2\sqrt{2}\sin\theta_W) = e \cdot 1.585$)

Die schwache Kraft ist ebenfalls selbstwechselwirkend: Der 3-Bosonen Vertex WWZ (siehe Graph links) existiert (beobachtet am LEP am CERN, 1999). Deshalb nimmt $\alpha_W = \alpha_W(q^2)$ ab wie bei der starken Wechselwirkung, aber langsamer.



Der Datenplot $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ als Funktion der Schwerpunktsenergie zeigt sowohl die grosse Masse der W's, als auch die relativen Anteile der drei möglichen Grafen, nämlich ν Austausch und ein *gamma* oder ein Z_0 im s-Kanal. Die totale Rate ist kleiner, als die des ν Austausches allein (Interferenz mit unterschiedlichen Vorzeichen).



Da die W^\pm geladen sind, können sie auch elektromagnetisch wechselwirken. Es gibt also auch ein $WW\gamma$ Vertex (rechter Graph). Die W Bosonen wechselwirken aber nicht mit starker Wechselwirkung.

Die Spezialität der schwachen Wechselwirkung ist ihre maximale *Paritätsverletzung*. Das heisst sie koppelt nur an linkshändigen Fermionen oder rechtshändige Antifermionen. Rechtshändige Fermionen spüren keine schwache Kraft!

Deshalb kennen wir bis heute auch nur linkshändige Neutrinos: Da Neutrinos nur schwach wechselwirken, würde ein allfälliges rechtshändiges Neutrino überhaupt keine Wechselwirkung spüren. Es hätte keinerlei Möglichkeiten mit einem anderen Teilchen in Kontakt zu kommen. Man spricht in diesem Fall von *sterilen Neutrinos*.

Schliesslich gibt es noch die **Gravitation**. Da sie im atomaren Massstab sehr viel kleiner ist, als die anderen drei Kräfte, spielt sie im Standardmodell der Teilchenphysik keine Rolle. Es gibt aber noch keine generell akzeptierte Theorie im Sinne einer QFT dafür, aber natürlich viele Ansätze.

Die *Gravitation* unterscheidet sich von den drei andern Kräften in zwei Punkten wesentlich:

Erstens ist die Gravitation für Materie und Antimaterie gleich, immer anziehend es gibt keine 'inverse' Masse (im Gegensatz zur elektrischen Ladung zum Beispiel). Man zeigt in der QFT, dass daraus folgt, dass der Spin der Kraftquanten, die Gravitonen, den Wert 2 haben muss. Zweitens ist die Masse gleichzeitig die für die Ankopplung verantwortliche Ladung und auch für die Dynamik relevante Grösse. Träge Masse = Schwere Masse (\Rightarrow ART), Alle Körper fallen im Gravitationsfeld gleich schnell.

Im atomaren Masstab ist die Gravitationskraft sehr klein im Vergleich zu den drei Wechselwirkungen des Standardmodells. Vergleichen wir die elektromagnetische Kraft mit der Gravitationskraft von zwei Teilchen mit Ladung z_1 und z_2 und der Masse m_1 und m_2 (natürliche Einheiten: $\hbar = c = 1$)

$$F_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{z_1 z_2}{r^2} \quad F_G = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.11)$$

$e^2/4\pi = \alpha = 1/137$. Also hat in den natürlichen Einheiten Γ die Dimension von m^{-2} : wir setzen $\Gamma = M_{Pl}^{-2}$. M_{Pl} heisst die *Planckmasse*. Sie ist die Masse, bei der die Gravitationskraft vergleichbar mit der elektromagnetischen Kraft zweier Elementarladungen ($z_1 = z_2 = 1$) wird. Es wird $M_{Pl} = 1.221 \times 10^{19} \text{GeV} = 21.77 \mu\text{g}$ (siehe [Berg99], Seite 131). Nur für Massen die grösser als die Planckmasse ist, spielt die Gravitation eine Rolle.

Die Planckmasse ist auch gerade diejenige Masse, bei der die potentielle gravitative Energie bei einem Abstand, der gleich der inversen Masse ist, gerade der Masse entspricht. Schliesslich ist der Schwarzschildradius einer Planckmasse gerade das doppelte der inversen Masse.

Die folgenden beiden Tabellen fassen die Teilchen und Wechselwirkungen im Standardmodell zusammen. Das Standardmodell hat sich in den letzten ca. 25 Jahren als ausserordentlich fruchtbar erwiesen, fast alle bekannten Effekte in der subatomaren Physik zu erklären und genau zu berechnen. Siehe auch G. Altarelli in [IOP98], page 127.

Wechselwirkungen und ihre Feldquanten

	Ladung	Feldquant	Masse	Spin	Kopplungsk. (100 GeV)
starke WW	Farbe	8 Gluonen	0	1	$\alpha_s = 1/8$
schwache WW	T_3	W^+, W^-, Z^0	82,91 GeV	1	$\alpha_W = 1/55$
elm. WW	elektr.	1 Photon	0	1	$\alpha = 1/128$
Gravitation	Masse	Graviton	0	2	$1/M_{Pl}^2$

Elementare Teilchen, ihre Ladungen und Wechselwirkungen

Wechselwirkung	Ladung	Quarks		Leptonen	
		u	d	e	ν_e
starke WW	Farbladung	r,g,b	r,g,b	-	-
elm. WW	el. Ladung	+2/3	-1/3	-1	-
schwache WW	schw. Isospin	+1/2	-1/2	-1/2	+1/2

Wobei zu beachten ist, dass die schwache WW nur an die linkshändigen Teilchen koppelt.

Dieses Standardmodell hat aber verschiedene Unschönheiten. Das Higgs Teilchen (siehe nächster Abschnitt) wurde immer noch nicht gefunden. Warum gibt es so viele Teilchen und so viele Wechselwirkungen (siehe Freiheitsgrade im übernächsten Paragraph)?

Zum Higgs: In der QFT wird verlangt, dass die gesamte Lagrangedichte 'lokal eichinvariant' ist, das heisst dass unter ortsabhängigen Transformationen (Umeichung) $U(x)$ des Kraftpotentials (z.B. φ, A in der ED) die Lagrangedichte nicht ändern soll. Man kann zeigen, dass daraus folgt, dass die Quanten des Kraftfeldes keine Masse haben dürfen. ([Kugo97], Seite 140).

Die W^\pm, Z^0 haben aber Masse. Um diesen Widerspruch auszuräumen, musste ein neues Teilchen ϕ mit Selbstwechselwirkungspotential V eingeführt werden. Es heisst *Higgs*, hat Spin=0, Ladung=0 und ist selbstwechselwirkend. Entscheidend ist, dass der Vakuumerwartungswert von ϕ verschieden von null ist, damit dürfen die zum gleichen Lagrangedichte gehörenden Vektorbosonen (W^\pm, Z^0) Masse haben. Ausserdem werden noch andere, mathematische Schwierigkeiten mit dem Higgs umgangen.

Das Higgs Teilchen ist das einzige wesentliche Element des Standardmodells der Teilchenphysik, das bisher noch nicht gefunden wurde. Der Hauptteil der Motivation für neue Experimente und Beschleuniger in der Teilchenphysik wird heute mit der Suche nach dem Higgs begründet. Würde es nicht existieren, müsste das Weltbild der Teilchenphysik ziemlich stark verändert werden.

Anzahl Freiheitsgrade: Wieviele *Freiheitsgrade*, also unabhängige Variablen besitzt nun das Standardmodell?

Die Quarks und Leptonen kommen in drei Generationen vor. Die Quarks gibt es in drei verschiedenen Farben und in zwei verschiedenen Helizitätszuständen. Elektronen gibt es ebenfalls in zwei verschiedenen Helizitäten, Neutrinos aber nur in einer. Schliesslich gibt es zu jedem Teilchen ein Antiteilchen. Multipliziert man alle diese Zahlen miteinander, erhält man 90 Freiheitsgrade für die Fermionen.

Die Wechselwirkungsbosonen: Photonen kommen in 2 Helizitätszuständen vor. Es gibt 8 Gluonen in je zwei Helizitätszuständen. Drei W und Z Bosonen mit je drei Helizitätszuständen ($M \neq 0$) dazu ein Higgs.

Total also 118 unabhängige Zustände! Warum so viele? Das ist schon nicht gerade eine besonders einfache Theorie! Aus dem einzigen Wasser, aus dem nach Thales von Milet alles aufgebaut sein soll sind 118 Wässerchen geworden! Das ist eine, aber nicht die einzige Motivation, um bessere übergeordnete Theorien zu finden.

Damit ist unsere gegenwärtige Sicht, was die Welt im innersten zusammenhält eigentlich abschliessend beschrieben. Der Rest der Vorlesung befasst sich damit, wie sich dieses Standardmodell dem Experimentator in der Praxis darstellt, und wo es eventuell versagt. Das Gewicht wird auf die Phänomenologie gelegt. An geeigneten Stellen werde ich auf neue Ideen zur Erklärung der Merkwürdigkeiten wie Supersymmetrie (zwischen Fermionen und Bosonen) sowie auf Aspekte der Astroteilchenphysik und der Kosmologie eingehen.

1.1.3 Zusammengesetzte Teilchen

Die starke Wechselwirkung erlaubt gebundene Zustände von Quarks. Wegen dem confinement kann es allerdings nur Zustände mit neutraler Farbladung geben. Da es je 3 Farben und Antifarben gibt, bestehen genau drei Möglichkeiten, farbneutrale Zustände aus Quarks herzustellen. Damit erhält man die schon erwähnten *Mesonen* ($q\bar{q}$) und *Baryonen* (qqq) und *Antibaryonen* ($\bar{q}\bar{q}\bar{q}$):

Natürlich kann es im Prinzip auch Kombinationen dieser drei Grundkombinationen geben (z.B. ein $qq\bar{q}\bar{q}$), aber diese wurden bisher nicht eindeutig identifiziert.

Beispiele für Mesonen und Baryonen (p.d.g. Folien).

Nomenklatur: Mesonen, die ein u oder d und ein s Quark enthalten, werden K Mesonen genannt. Die elektrische Ladung wird mit einem hochgestellten Index angegeben: $K^+ = u\bar{s}$, $\bar{K}^0 = \bar{d}s$. Wenn es sich nur um u und d Quarks handelt: π, η für Spin antiparallel, ρ für Spin parallel.

Charm quark c Inhalt führt zu D Mesonen, b Quark Inhalt zu B Mesonen. Falls das zweite Quark nicht u oder d ist, dann unterer Index: $D_s = \bar{c}s$, $B_c = \bar{b}c$.

Ebenfalls ist es möglich zwei Gluonen zu einem stabilen System zusammenzuknüpfen, da sie selber wechselwirken: *Glueballs*. Seit einiger Zeit ist ein ziemlich sicherer Kandidat gefunden ($f_0(1500)$).

Die Nomenklatur der drei - Quark - Zustände (Baryonen) wird in einem späteren Kapitel (siehe 1.2.1) besprochen.

Natuerlich gibt es auch die elektromagnetisch gebundenen Zustände. Da spielt insbesondere das Positronium (e^+e^-) eine wichtige Rolle als Testplatz fuer das Fermion-Antifermion System. Wir werden das noch eingehender besprechen.

Das nächstkompliziertere elektrische System ist das Wasserstoffatom.

Mehrteilchensysteme, die nur mit der schwachen Wechselwirkung gebunden sind – also aus “Neutrino - Atome” – gibt es nicht.

Kernkräfte, die zwischen Nukleonen wirken, und die Atomkerne zusammenhalten, sind nichts anderes als die Überbleibsel von starken Kräften, die aus dem Nukleon kurz herauschauen. Es müssen mindestens zwei Gluonen sein, wegen Farbneutralität, oder ein

$q\bar{q}$ - Paar, das heisst ein Meson. Für die in der Kernphysik relevanten Effekte reicht es meistens mit einem “One - Boson - Exchange” - Potential zu rechnen. Als Bosonen kommen die Mesonen in Frage, die dann ein Yukawa Potential mit der Masse des entsprechenden Mesons, hauptsächlich Pion ($M = 139$ MeV) bilden.

Die Kernkräfte zwischen den Protonen und Neutronen, die die Atomkerne zusammenhalten, sind also eine Art van der Waals - Kraft der starken Wechselwirkung, analog zum Beispiel der Wasserstoffbrückenbindung zwischen Molekülen.

1.1.4 Grenzen des Standardmodells?

Man erwähnt meistens acht Merkwürdigkeiten des Standardmodells (siehe z.B. [Berg99] Seite 115, [IOP98], Seite 158): Wieso verletzt die schwache WW die Spiegelsymmetrie? Wieso gibt es keine rechtshändigen Neutrinos? Wieso haben die Quarks ein Drittel der Ladung von Leptonen? Wieso gibt es gerade drei Generationen? Was bestimmt die relative Stärke der Wechselwirkungen? Was bestimmt die Massen und Mischungswinkel?

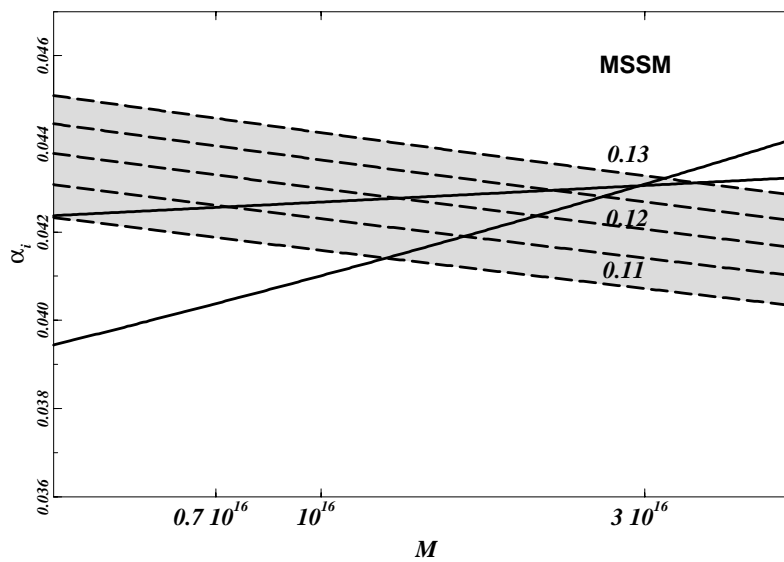
Die heutige Genauigkeit des SM ist extrem gut, und alle Messungen passen gut zusammen. Es fehlt nur das Higgs.

Ausserdem wissen wir heute ziemlich sicher, dass das Universum zur mindestens der Hälfte der Masse aus Materie besteht, die zwar die Gravitation spürt, aber nicht durch Teilchen des Standardmodells beschrieben werden kann. Weitere Ungereimtheiten werden wir später behandeln.

Schliesslich fällt auf, dass sich die drei Kopplungskonstanten bei grossen q^2 treffen, was auf die Existenz einer gemeinsamen Wechselwirkung bei ganz hohen Energien (10^{15} GeV) hindeutet (*Grand Unified Theory, GUT*). Merkwürdigerweise treffen sich die Kopplungskonstanten nun aber nicht genau bei derselben Energie. Die drei Extrapolationen (unter Annahme des Standardmodells) treffen sich bei 10^{13} GeV (e.m. und schwach), 10^{14} GeV (e.m. und stark) und 10^{16} GeV (stark und schwach). (Siehe [IOP98], page 165, [Aite82], page 283).

Eine mögliche übergeordnete Theorie, die heute am meisten diskutiert wird, ist die Vereinigung aller Wechselwirkungen durch *Supersymmetrie* (*SUSYGUT*, oder *SUGRA*, wenn man auch die Gravitation einbezieht). Die Supersymmetrie ist die Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen, und wird aus der Poincaregruppe entwickelt (alle Symmetrien der relativistischen Raum-Zeit). Es gibt darin zu jedem Teilchen einen supersymmetrischen Partner: Zu jedem Quark zum Beispiel gibt es ein Boson \tilde{q} , das mit *squark* bezeichnet wird.

Das führt natürlich zu einer Verdoppelung des Teilchenzoos. Es hat aber auch einiges zu bieten, insbesondere treffen sich zum Beispiel wegen zusätzlicher Korrekturen die drei Kopplungskonstanten fast an einem Ort ($2 \cdot 10^{16}$ GeV) (Figur unten aus Langacker, Polonski, 1995). Vielleicht ist das der Weg, um die fehlende dunkle Materie im Universum zu verstehen.



1.1.5 Exkurs: natürliche Einheiten

31.10.01

In den Fällen, wo zwei Grössen einander proportional sind, und die Proportionalkonstante eine Naturkonstante ist, kann diese weggelassen, das heisst 1 gesetzt werden, um

die Anzahl der verschiedenen Einheiten zu reduzieren. Beispiele

$$x = ct \quad E = \frac{3}{2}kT \quad S = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \quad (1.12)$$

Wird die Lichtgeschwindigkeit 1 gesetzt, so ist das äquivalent damit, Längen in Einheiten der Zeit zu messen: *Lichtjahre*, Lichtsekunden. Das ist bereits offizielle Methode der internationalen Definition der Längeneinheit. Damit wird die Einstein'sche Massen-Energiebeziehung:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \rightarrow \quad E^2 = p^2 + m^2 \quad (1.13)$$

Mit $k=1$ werden Temperaturen in eV gemessen: $T_{\text{Raum}} = 25\text{meV}$, $T_{\text{Sonne}} = 0.5\text{eV}$. $h/2\pi = 6.58 \times 10^{-25} \text{GeV} \cdot \text{s} = 1$ führt zu Zeitangaben in GeV^{-1} , ich bin zum Beispiel etwa $2.15 \times 10^{33} \text{GeV}^{-1}$ alt.

Die Kombination dieser Konstanten führt zu $ch/2\pi = 1 = 0.197 \text{GeV} \cdot \text{fm}$, eine Zahl die man sich merken soll. Sie gibt die Umrechnung von Massen in Distanzangaben, der Hörsaal hat eine Breite von ca. 10^{17}GeV^{-1} . Die Reichweite der schwachen Wechselwirkung bei kleinen Energien ist damit etwa

$$R = \frac{1}{M_W} = \frac{1}{80 \text{GeV}} = 0.06 \text{fm} \quad (1.14)$$

. Wir können nun alle Größen in GeV angeben, das ist in der Teilchenphysik üblich und wird als das natürliche Einheitensystem bezeichnet. Einige fundamentale Größen werden damit zu reinen Zahlen, z.B. der Spin und die elektrische Elementarladung:

$$S_e = \frac{1}{2} \quad \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \quad (1.15)$$

Man könnte natürlich noch einen Schritt weitergehen, und auch für die Massen/Energie Einheit eine natürliche Einheit wählen, wobei sich offensichtlich die Planckmasse anbietet. Setzt man $M_{Pl} = 1$ wird die Hörsaalbreite 10^{26} , meine Masse 5×10^9 , mein Alter 2×10^{52} und das Alter des Universums 4×10^{60} alles reine Zahlen. Damit wären wir alle Einheiten los. Dieses System hat sich in der Praxis aber noch nicht durchgesetzt.

1.1.6 Teilchen am Anfang des Universums

Das heutige Standardmodell der *Kosmologie* mit einem *hot big bang* wird hauptsächlich durch 3 Beobachtungen begründet:

1. Das Universum dehnt sich gegenwärtig aus, und zwar je grösser die Distanz um so schneller. Es gilt in guter Näherung $v = Hd$, oder $H = \dot{a}/a$, wo a ein typischer (grosser) Abstand im Universum ist. Bei heutigen Beobachtungen misst man $H_0 = 65 \pm 5 \text{ km/s/Mpc}$.

2. Man misst einen kosmischen Mikrowellen Untergrund CMBR mit einer thermischen Verteilung mit einer Temperatur von 2.7 K, der aus der heißen Zeit des Universums übriggeblieben ist. Aus der Analyse der Fluktuationen dieser Hintergrundstrahlung als Funktion der Beobachtungsrichtung können viele charakteristische Größen des Universums bestimmt werden.
3. Das heutige relative Vorkommen der leichten Elemente H, ^4He (24%), ^2H (3×10^{-5}) und ^7Li (10^{-9}) im Weltall wird durch Modelle der heißen Big Bang Nukleosynthese (BBN) relativ gut beschrieben.

Die frühe Geschichte des Universums zusammen mit den Teilchen, die das jeweilige Zeitalter dominieren, ist in der folgenden Grafik illustriert. Einen guten Überblick über die Teilchenphysik in der frühen Geschichte des Universums gibt [Berg99].

Interessant ist, dass gegenwärtig das Universum von Materie dominiert zu sein scheint, Antimaterie scheint es praktisch nicht zu geben.

Die **Zahl der Baryonen** (hauptsächlich n und p) im Universum ist aber auch viel kleiner als die Zahl der Photonen: $n_B/n_\gamma \approx 10^{-9}$.

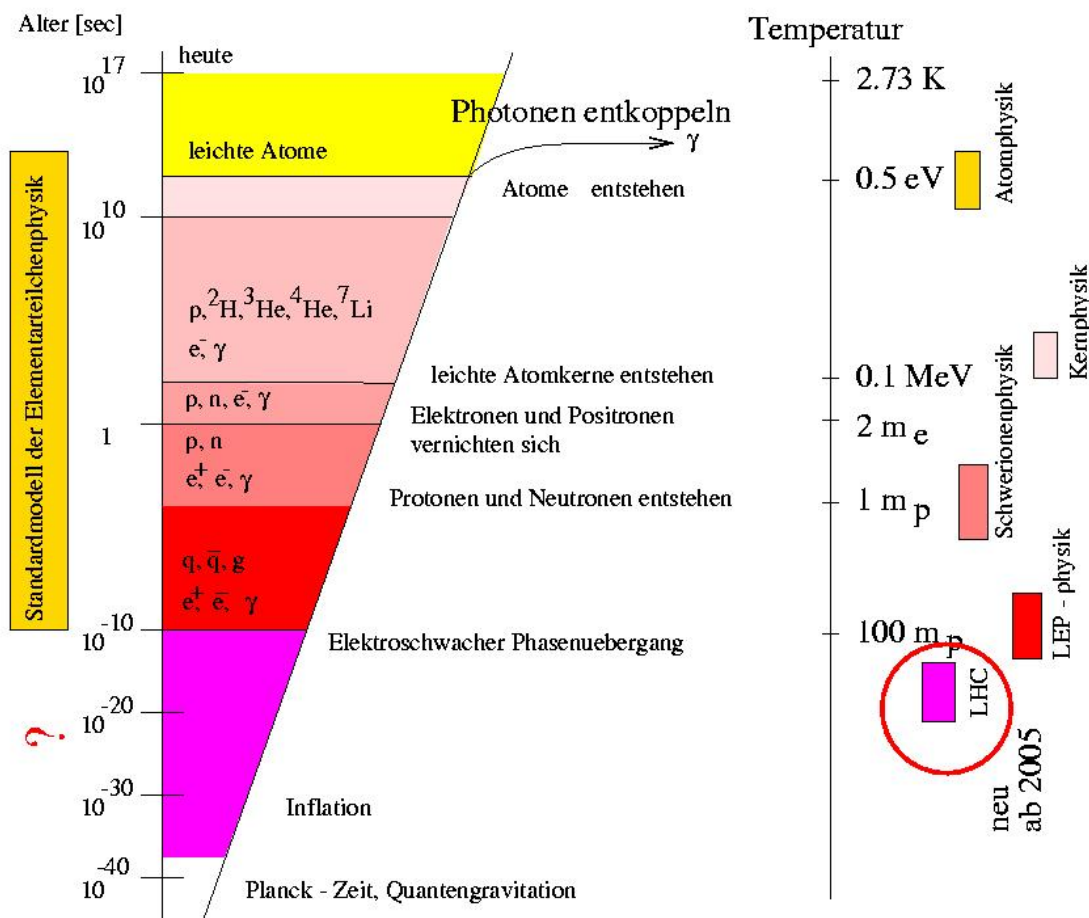
Falls es zu einer Zeit, wo das Universum sehr dicht war, mal gleich viel Materie und Antimaterie gegeben hätte, müsste eigentlich alles annihiliert sein, was aber offensichtlich nicht der Fall ist. Es muss also eine irgendeine Form von Asymmetrie geben oder gegeben haben.

Wie wir noch sehen werden, erlaubt die Tatsache, dass es nicht nur eine, sondern drei Generationen von Teilchen gibt, eine Materie - Antimaterieasymmetrie. Es ist zum Glück nicht alles verstrahlt, sonst würden wir nicht existieren.

Von besonderer Bedeutung für die Teilchenphysik ist die kürzlich etablierte Massenzusammensetzung des Universums. Die Analyse der Anisotropie der Hintergrundstrahlung liefert die meisten Resultate, aber die oben erwähnte BBN Analyse ist dazu konsistent:

Baryonische Materie (also 'normale Materie')	ca. 5%
dunkle Materie, die nur gravitativ wechselwirkt	ca. 30%
dunkle Energie der kosmologischen Konstante	ca. 65%

Mit der bekannten Teilchenphysik können wir bisher nur die Baryonische Materie einigermaßen verstehen. Supersymmetrische Ergänzungen liefern uns vielleicht die Erklärung für die dunkle Materie. Von der Natur der dunklen Energie in der kosmologischen Konstante haben wir keine Ahnung.



1.2 Teilchen, Symmetrie und Erhaltungssätze

14.11.01

Symmetrieprinzipien spielen auch in der Teilchenphysik eine grosse Rolle. Die Forderung nach der Invarianz eines physikalischen Vorganges unter einer *Symmetrioperation* (z.B. Translation, Spiegelung) führt zu Erhaltungssätzen. Dadurch werden die meisten Prozesse in der Teilchenphysik bestimmt, die Erhaltungssätze in Form von Quantenzahlen sagen uns, was erlaubt und was verboten ist.

1.2.1 kontinuierliche Symmetrien und Erhaltungssätze

Translation und Impulserhaltung

Führt man mit einem System von Teilchen mit Index i eine *Translation* durch, sodass $x'_i = x_i + a$ ist, soll sich die physikalischen Eigenschaften des Systems nicht ändern

(Translationsinvarianz). Verallgemeinert können wir auch eine Verschiebung des Zeitnullpunktes zulassen: $t = t + t_0$ und von einer 4-er Ortsvektor Translation sprechen. Wie in der klassischen Mechanik ist auch in der Quantenmechanik die Forderung nach der Translationsinvarianz gleichbedeutend mit Energie- und Impulserhaltung: Es muss gelten:

$$x_i^\mu = x_i^\mu + a^\mu \quad \Leftrightarrow \quad p_i^\mu = p_f^\mu \quad (1.16)$$

wobei p_i und p_f die totale 4er Impulssumme des Anfangszustandes (initial) und des Endzustandes (final) darstellt.

Beispiel: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Wir begeben uns ins Schwerpunktsystem:

$$p_i = (m_\pi, \vec{0}), \quad p_f = (E_\mu, \vec{p}_\mu) + (|p_\nu|, \vec{p}_\nu) \quad (1.17)$$

ausserdem $E_\mu^2 = m_\mu^2 + p_\mu^2$.

Also $\vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$ und $(m_\pi - |p|)^2 = m_\mu^2 + |p|^2 \Rightarrow |p| = 30 \text{ MeV}$.

Uebung: $p\bar{p} \rightarrow 4\pi^\pm$. (gestoppte \bar{p} in Wasserstoff) Berechne den mittleren Impuls, wenn alle 4 Pionen die gleiche Energie haben. Ueberlege in welcher Situation ein Pion den maximal möglichen Impuls erhält, und berechne diesen.

Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung

Die Forderung nach *Rotationsinvarianz* führt zur Erhaltung des gesamten *Drehimpulses* eines Systems. Dieser setzt sich zusammen aus *Spin* und *Bahndrehimpuls*. Für die Teilchenphysik relevant ist, dass die Drehimpulse quantisiert sind.

Bezeichnung $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Auch die veraltete spektroskopische Notation $^{2S+1}L_J$ wird immer noch verwendet, wobei fuer $L=0,1,2,3$ die Buchstaben S,P,D,F gesetzt werden. Ein *Meson*, das aus $q\bar{q}$ besteht kann also in verschiedenen Quantenzuständen bez. des Drehimpulses vorkommen:

$$L=0 \Rightarrow J=0 \text{ oder } 1; \quad {}^1S_0, {}^3S_1$$

$$L=1 \Rightarrow J=0,1,2; \quad {}^3P_0, {}^1P_1, {}^3P_1, {}^3P_2$$

Beispiele:

$$u\bar{u}, \uparrow\downarrow, \pi^0, {}^1S_0$$

$$u\bar{d}, \uparrow\uparrow, \rho^-, {}^3S_1$$

Der gesamte Drehimpuls J des Systems, wird dann zum Spin des gebundenen Zustandes, des Mesons. Die Mesonen mit 1S_0 stellen jeweils den niedrigsten Energiezustand dar, bilden also die Teilchen mit den kleinsten Massen.

Bei den *Baryonen* ist die Sache etwas komplizierter, man hat 3 Fermionen, deren Spinsumme kann entweder $1/2$ oder $3/2$ sein. (Der Bahndrehimpuls wird durch zwei Impulse charakterisiert L_{12} zwischen zwei ausgewählten quarks, und L_3 zwischen dem

Schwerpunkt von diesn und dem Dritten. $L = L_{12} + L_3$.) Für den Fall $L=0$ gibt es zwei Möglichkeiten: $J=1/2$ und $J=3/2$. Wie bei den Mesonen sind die tiefsten Zustände auch die Energiegrundzustände, für $J=1/2$ kennen wir zum Beispiel p, n, Σ (ein s quark) und Ξ (2 s quarks).

Symmetrie der baryonischen Wellenfunktion:

([Halz84], page 51; [Povh95], page 200). Da Quarks Fermionen sind, muss die Gesamtwellenfunktion der drei Quarks antisymmetrisch sein, unter der Vertauschung von zwei gleichen Quarks. Die Wellenfunktion eine Baryons besteht nun aus drei Teilen:

$$\psi = |\text{Raum} \rangle |\text{Spin} \rangle |\text{Farbe} \rangle \quad (1.18)$$

- Die Raumfunktionen sind für niedrige Energiezustände symmetrisch, falls $l = 0$.
- Die Spinfunktion eines Paares von Fermionen ist symmetrisch für $S=1$ und antisymmetrisch für $S=0$: Die Zustände sind im einzelnen nämlich:
 $S=1, m=(1,0,-1)$, symmetrisch: $\uparrow\uparrow, \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \downarrow\downarrow$
 $S=0, m=0$, antisymmetrisch: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$
- Die Farbwellenfunktion ist immer antisymmetrisch ([Mart92], page 152). (folgt unter anderem aus der untenstehenden Ueberlegung). Man kann schreiben:

$$|\text{Farbe} \rangle = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma \rangle \quad \alpha, \beta, \gamma = R, G, B \quad (1.19)$$

$J=3/2$ Dekuplett: Setzen wir nun drei gleiche Quarks zu einem Baryon zusammen (z.B. $uuu = \Delta^{++}$), so folgt, dass die Spinfunktion symmetrisch sein muss. Das heisst, je zwei Spins müssen in $S=1$ sein, also alle drei Spins müssen in die gleiche Richtung zeigen, es wird $J=3/2$: $\psi = |u \uparrow u \uparrow u \uparrow \rangle$

In der Tat findet man für $J=3/2$ im ganzen 10 verschiedene Teilchen, die aus den drei leichten Quarks, u, d und s , zusammengesetzt sind (das sogenannte $3/2$ Dekuplett): $\Delta, \Sigma^* (1 s \text{ quark}), \Xi^* (2 s), \Omega (3 s)$. Ihre Masse liegt etwa 200 MeV höher als die des $1/2$ Oktetts. (siehe unten).

Historisch war die Existenz dieses Dekupletts ein wichtiges Argument dafür, dass es einen weiteren Freiheitsgrad (nämlich die Farbe) braucht, um die Wellenfunktion antisymmetrisch zu machen.

$J=1/2$ Oktett: Setzen wir drei Quarks zu Spin $J=1/2$ zusammen, so könnten wir versucht sein, den Zustand $\psi = |u \uparrow u \uparrow u \downarrow \rangle$ zu bilden. Er wäre unter Vertauschung des ersten und zweiten Teilchens symmetrisch in der Spinfunktion, aber antisymmetrisch unter Vertauschung des zweiten und des dritten. Da die Farbe aber in beiden Fällen antisymmetrisch transformiert, ist im zweiten Fall die totale Wellenfunktion symmetrisch, was der Fermi-Dirac Statistik widerspricht. Es gibt deshalb keine $J=1/2$ Baryonen aus drei Quarks mit identischem Flavor.

Hingegen können wir den Zustand $\psi = |u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle$ bilden. Denn bei der Vertauschung der ersten beiden Quarks ist die Spinfunktion symmetrisch. Bei der Vertauschung des zweiten und dritten Quarks ist die Spinfunktion zwar antisymmetrisch, aber die Flavorsymmetrie transformiert ebenfalls mit einem Vorzeichen (siehe 1.2.4), sodass die totale Antisymmetrie gewährleistet ist.

Das Proton kann also existieren, und damit auch Neutronen, Σ^\pm (1 s) und Ξ^{-0} (2 s). Diese Baryonen bilden zusammen das $J=1/2$ Oktett. Die beiden Quarks mit den gleichen Flavours müssen jeweils im symmetrischen Spinzustand $\uparrow\uparrow$ sein.

Sind **alle drei Quarks verschieden**, kann man im ganzen drei Teilchen mit uds bilden:

$(u \uparrow d \downarrow)$ in $S=0$: $\Lambda(1116)$;

$(u \uparrow d \uparrow)$ in $S=1$: $\Sigma^0(1193)$ (in Analogie zu den Σ^\pm Zuständen uus und dds);

$J=3/2$: $\Sigma^0(1384) = |u \uparrow d \uparrow s \uparrow\rangle$.

Ersetzt man ein s durch ein c heissen die Teilchen gleich, aber mit Index c , (z.B. Λ_c : udc), mit einem b quark heissen sie gleich mit Index b . Davon ist erst das Λ_b einigermaßen etabliert, mit der Beobachtung von einer Handvoll Ereignissen bei LEP.

Für höhere L wird das Spektrum ziemlich gross, zu jedem L gibt es 6 verschiedene Gesamtdrehimpuls – Zustände.

1.2.2 diskrete Raum- und Zeitsymmetrieen

Neben den kontinuierlichen Symmetrien der Translations- und Rotationsinvarianz, gibt es auch noch die *Spiegelung* und *Zeitumkehr*, die ein Vorzeichenwechsel beinhaltet:

$$P : x_i \rightarrow -x_i \quad T : t \rightarrow -t \quad (1.20)$$

Vektoren ändern unter P ihr Vorzeichen (z.B. x , p , E), Axialvektoren ändern es nicht (z.B. Spin, Magnetfeld). Zahlen, die ihr Vorzeichen unter P ändern, heissen Pseudoskalare. Unter T ändern p , S , und B ihr Vorzeichen, siehe [Per91], page 100.

	T	P	
t	-	+	Zeitachse
\vec{x}	+	-	Ortsvektor
\vec{p}	-	-	Impuls
E	+	+	Energie
\vec{S}	-	+	Spin, Drehimpuls $x \cdot p$
(\vec{E})	+	-	el. Feld
\vec{B}	-	+	magn. Feld

Die Energie ist quadratisch im Impulsraum und ändert natürlich ihr Vorzeichen nicht (Energieerhaltung!): Die *invariante Masse* eines Systems ist definiert als das lorentzinvariante Skalarprodukt des gesamten Energie - impuls - 4er - Vektors:

$$m^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 \quad (1.21)$$

und ist unter allen Raum-Zeit Symmetrieen der Poincareegruppe invariant, also auch unter P und T.

P heisst auch *Paritätsoperation*. Im Gegensatz zur Energie und Drehimpulserhaltung ist die Parität keine exakte Symmetrie, die schwache Wechselwirkung verletzt die Parität maximal. Das heisst schwache Prozesse die auf der einen Seite des Spiegels vorkommen, sind auf der anderen Seite völlig verboten. Das scheint auf den ersten Blick im Vergleich zur klassischen Physik ungewöhnlich, da ist ja alles symmetrisch. Andererseits sind wir uns vom Alltag her gewohnt, dass es Paritätsverletzungen gibt: Linkshänder, rechts- und linksdrehende Glukose in der Biologie reagiert völlig verschieden usw.

Experiment von Wu 1957, angeregt von Lee and Young. [Lohr92], page 57: Die Winkelabhängigkeit von Elektronen aus dem Betazerfall von polarisierten ^{60}Co Kernen ist asymmetrisch (polarisiert: das heisst die Kernspins werden mit einem Magnetfeld ausgerichtet). Weil der Spin ein Axialvektor ist, ist das eine Paritätsverletzung.

Die Paritätsoperation transformiert eine Wellenfunktion um einen Phasenfaktor P_a :

$$\hat{P}\psi(x, t) = P_a\psi(-x, t) \quad (1.22)$$

Da $\hat{P}^2 = 1$ sein muss, wird $P_a = \pm 1$.

Einen besonders einfachen Fall erhält man, wenn man sich ins Ruhesystem eines Teilchens begibt. Dann sind die Teilchen Eigenzustände der Paritätsoperation, und P_a ist der Eigenwert. Man spricht von der intrinsischen *Parität* eines Teilchens in Ruhe, oder einfach die Parität. Sie nimmt die Werte +1 oder -1 an.

Bei Vielteilchensystemen multiplizieren sich die intrinsischen Paritäten (multiplikative Quantenzahl).

Ein Teilchen mit definiertem Drehimpuls ist ebenfalls ein Eigenzustand der Parität. Die Parität der Kugelfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ ist gerade $(-1)^l$ (siehe Atomphysik).

Ein System mit einem Fermion und einem Antifermion ist zusammen im Ruhesystem natürlich ebenfalls ein Eigenzustand der Parität. Ein Fermion und das zugehörige Antifermion haben jedoch immer einen entgegengesetzten Eigenwert: $P_{f\bar{f}} = -1$. Das kann man mit Hilfe der Formalismus der Diracgleichung beweisen.

Da Fermionen immer nur in Paaren kreiert und zerstört werden, kann man die intrinsische Parität von Fermionen nur relativ zueinander bestimmen. Man muss einmal etwas festlegen. Man legt die Parität der Leptonen und Quarks mit +1, diejenigen der Antileptonen und Antiquarks mit -1 fest.

Unsere Mesonen mit Drehimpuls L haben deshalb eine Parität $(-1)^{L+1}$, z.B. die π haben alle eine negative Parität. Die Parität der Baryonen im Grundzustand ist ebenfalls positiv.

Beispiel: Mit $\pi^- + d \rightarrow n + n$, [Mart92], page 95. aber $\pi^- + d \rightarrow n + n + \pi^0$ geht nicht in Ruhe: Das Deuteron hat $J^P = 1^+$. Im ersten Fall sind im Endzustand der beiden Neutronen die Spins antiparallel ($S=0$), $l = 1$ und die Parität $(-1)^l$, also negativ. Die zweite Reaktion ist verboten - oder wenigstens stark unterdrückt, weil dann wegen der Parität $l = 0$ sein müsste, und somit die beiden Neutronen in einem identischen Zustand erzeugt werden, was dem Pauliprinzip widerspricht. Wäre die Parität der Pionen positiv, würde die erste Reaktion bereits zu zwei identischen Neutronen führen, die beiden Reaktionen müssten etwa gleich unwahrscheinlich sein. Wir schliessen aus der Beobachtung, dass die erste Reaktion stark überwiegt, dass die Parität der Pionen tatsächlich negativ ist.

Elektrischen Feld: $\nabla \cdot E(x, t) = \rho(x, t)$, deshalb ändert sich das Vorzeichen des E-Feldes bei P . Da $E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$, muss sich auch A ändern. Eine elektromagnetische Welle im Vakuum sieht keine Ladung, also $\phi = 0$, das Photon wird deshalb nur durch eine Funktion des Vektor-Potentials A beschrieben. Es hat demnach negative Parität. $P_\gamma = -1$.

Übung zur Parität: Wieso zerfällt das η nicht in 2 Pionen, sondern nur in 3 (Eigenschaften der Teilchen bei [PDG00] nachschauen), das ρ^0 hingegen schon?

T Verletzung:

Die *Zeitumkehr* ist nicht unitär, es gibt keine Eigenzustände und deshalb keine T Parität als Eigenwert.

Aus der T Invarianz folgt aber unmittelbar (siehe obige Tabelle), dass Teilchen kein el. Dipolmoment (EDM) haben dürfen: $\vec{E} \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{S}$. Für das Neutron siehe zum Beispiel: [Per91], page 103. Man beachte aber, dass ein magnetisches Dipolmoment erlaubt ist: $\vec{S} \cdot \vec{B}$ ist invariant unter T.

Aus der T Invarianz folgt das Prinzip des detaillierten Gleichgewichtes: Dreht man eine Reaktion in der Zeit um, kann man genaue quantitative Aussagen über die beiden Fälle machen, siehe Kapitel 2.1.

1.2.3 Teilchen, Antiteilchen und die C – Parität

([Mart92], page 3-9, [Frau99] S. 202-207)

Der folgende Gedankengang führt uns zu einer mit der SRT verträglichen Erweiterung der QM:

Die Einführung der Massen- Energieäquivalenz nach Einstein

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} \quad \Rightarrow \quad |E| \geq m^2 \quad (1.23)$$

hat den vorerst unschön erscheinenden Nachteil, dass es sowohl positive als auch negative Energielösungen gibt, deren Betrag stets grösser als die Ruhemasse m ist. In der relativistischen QM führt dies dazu, dass es zu jedem Teilchenzustand auch den konjugiert komplexen dazu mit negativer Energie gibt. Das führt vorerst zu einer Katastrophe, indem alle positive Zustände unter Abstrahlung von Energie in immer tiefere negative Zustände übergehen würden.

Rufen wir uns zuerst die *Diracgleichung* in Erinnerung: Sie ist die minimale Erweiterung der Schrödingergleichung, die den Anforderungen der Lorentzinvarianz genügt ([Mart92], page 4,5). Dafür muss sie insbesondere im Hamiltonoperator sowohl die Masse als auch den Impulsoperator enthalten, und zwar in 1. Ordnung, da die Zeitabhängigkeit der Schrödingergleichung auch 1. Ordnung ist, sonst wie die Lorentzinvarianz nicht zu erfüllen. Aus diesem Plausibilitätsargument erhielt Dirac folgender Ansatz:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta m\psi - i\sum_{i=1}^3\alpha_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \quad (1.24)$$

wo α und β vorerst beliebige Koeffizienten sind.

Ausserdem muss das Äquivalenzprinzip erfüllt sein: Setzt man zum Beispiel eine ebene Welle $\psi(x, t) = Ne^{i(px-Et)}$ und differenziert sie zweimal nach der Zeit, verwendet $E^2 = p^2 + m^2$ und ersetzt p durch den entsprechenden Operator der Quantenmechanik $-i\frac{\partial}{\partial x_i}$ erhält man diese Bedingung in der Form der Klein-Gordon Gleichung:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\sum_i\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} + m^2\psi \quad \text{oder} \quad (\square + m^2)\psi = 0 \quad (1.25)$$

Diese Bedingungen müssen also Lösungen der Diracgleichung ausserdem erfüllen. Daraus erhält man die folgende Bedingungen an die Koeffizienten in der Diracgleichung:

$$\alpha_i^2 = 1 \quad \beta^2 = 1 \quad \beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0 \quad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 (j \neq i) \quad (1.26)$$

Diese Bedingungen können nur erfüllt werden, wenn es sich mindestens um 4 dimensionale Matrizen handelt. Die Diracgleichung ist also eine 4 dimensionale Matrixgleichung für die Vektoren $\psi(x, t) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$. Diese werden *Spinoren* genannt. Der Ansatz

$$\psi(x, t) = u(p)e^{i(px-Et)} \quad (1.27)$$

führt zur Eigenwertgleichung für den 4 komponentigen zeitunabhängigen Spinor $u(p)$:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)u(p) = E \cdot u(p) \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (1.28)$$

Die α_k sind 4er Matrizen, die aus je zwei Paulimatrizen σ_k in der Nebendiagonale bestehen, und β eine erweiterte Einsmatrix ist:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Etwas moderner und viel bequemer schreibt man die ganze Sache als 4er Vektoren und definiert:

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \quad i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \quad \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \quad (1.30)$$

Damit wird die Diracgleichung und die an die α_k und β gestellten Bedingungen:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.31)$$

Diese Gleichung hat **vier unabhängige Lösungen**. Sie entsprechen den Basisvektoren der Spinoren. Und zwar gibt es je eine Spin up und eine Spin down Lösung mit positiver und gleicher aber negativer Energie. Es handelt sich also um die Beschreibung eines Spin 1/2 Teilchens. Wie bekannt beschreibt die positive Energielösung ein Elektron korrekt, wobei insbesondere auch das magnetische Moment $\mu = e/m \cdot S$ korrekt herauskommt.

Eine wesentliche eleganterer und allgemeinere Herleitung bekommt man, wenn man die gruppentheoretischen Darstellungen der Lorenzgruppe (die Symmetriegruppe der Lorenztransformationen) im Raum der Wellenfunktionen untersucht. – Den Formalismus der Diracgleichung werden wir bei der Einführung der Eichtheorien als Beispiel wieder brauchen.

Die **negativen Energielösungen** wurde von Dirac ursprünglich mit Löcher in einem See von negativen Energiezuständen identifiziert. Im Vakuumgrundzustand, sind alle negativen Energiezustände voll (wegen dem Pauliprinzip sitzen zwei Elektronen auf einem Zustand). Eine Paarerzeugung $\gamma \rightarrow e^+e^-$ besteht in diesem Bild daraus, dass ein Elektron aus dem See in einen positiven Zustand gehoben wird, und das zurückbleibende Loch stellt das Antiteilchen, das Positron dar.

Im modernen Sinne definiert man die Operation der *Ladungskonjugation*:

$$C : \text{Teilchen} \rightarrow \text{Antiteilchen} \quad (1.32)$$

und umgekehrt. Die *Antiteilchen* entsprechen den negativen Energielösungen. Im Beispiel einer ebenen Welle

$$\psi \propto e^{i(px-Et)} \quad (1.33)$$

sieht man sofort, dass das äquivalent zu einem Teilchen ist, dass **in der Zeit rückwärts läuft**.

Generell hat ein Antiteilchen umgekehrtes Ladungsvorzeichen und somit umgekehrtes magnetisches Moment, alle anderen Eigenschaften bleiben gleich, insbesondere die Masse. Bsp: $e^+ \rightarrow e^-$, $u \rightarrow \bar{u}$, $\pi^+ \rightarrow \pi^-$.

Erzeugt werden Antiteilchen z.B. in der Paarproduktion aus einem Photon. Es können Elektronen oder Quarks sein. Antiquarks können natürlich auch durch Paarerzeugung aus einem Gluon entstehen.

Einen interessanten Spezialfall bilden die Teilchen, die ungeladen sind. Offensichtlich ist zum Beispiel das γ und das π^0 ein Eigenzustand der Ladungskonjugation. Da $C^2 = 1$,

kommen als Eigenwerte nur ± 1 in Frage. Diese heissen *C-Parität*. Die C-Parität ist eine 'gute' QUANTENZAHLE, sie bleibt erhalten in Prozessen, bei denen nur e.m. und starke WW vorkommt.

Die C-Parität eines Systems von mehreren Teilchen ist das Produkt der C-Paritäten: $C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \dots$. Man spricht auch von multiplikativen Quantenzahlen.

Ebenfalls bilden Paare von gleichen Teilchen und Antiteilchen Eigenzustände. Die C-Parität eines Boson-Antiboson Systems ist $(-1)^L$ (vertauschen der beiden Teilchen ist gleichbedeutend wie Spiegelung), die eines Fermion-Antifermion Systems ist $(-1)^{L+S}$ (für eine Herleitung siehe [Gott86], vol 2, page 249 oder [Lohr92], page 61). Beispiel: $C\pi^0 = +1$, wie im folgenden plausibel gemacht wird: Es sei:

$$|\psi \rangle_{tot} = |\psi_{Raum} \rangle |\psi_{Spin} \rangle \quad (1.34)$$

Für den Raumanteil gilt:

$$C|\psi_{Raum} \rangle = P_{\bar{q}q}P|\psi_{Raum} \rangle = -1 \cdot (-1)^L |\psi_{Raum} \rangle \quad (1.35)$$

Die Spinwellenfunktion fuer ein Paar von Fermionen ist symmetrisch für S=1 und antisymmetrisch für S=0, damit gibt es also einen Faktor $(-1)^{S+1}$, gesamthaft also $(-1)^{L+S}$.

P- und C- Paritäten von Teilchen- Antiteilchenpaaren:

	P	C
Bosonen	$(-1)^L$	$(-1)^L$
Fermionen	$(-1)^{L+1}$	$(-1)^{L+S}$

Man schreibt oft J^{PC} , z.B: $\pi^0 : 0^{-+}$, $\rho^0 : 1^{--}$

Die C-Parität eines Photons ist negativ: Das Vorzeichen der Ladung wechselt, und damit des E Feldes und auch des Potential ϕ . Wegen $E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$ muss auch A das Vorzeichen wechseln. Ein γ besteht aber aus A Feldern, also ist $C_\gamma = -1$.

In der Tat zerfällt das π^0 in zwei Photonen, aber nicht in 3. (Limite $< 3 \times 10^{-8}$, erwartet ist $O(\alpha)$). Schöne Bestätigung für den Aufbau des π^0 aus einem Fermion-Antifermionpaar.

Die C-Parität wird aber durch die schwache Wechselwirkung verletzt, da sie nur mit linkshändigen Fermionen und rechtshändigen Antifermionen funktioniert.

CPT Theorem

Die Kombination *CPT* ist aber in allen Quantenfeldtheorien eine gute Symmetrie. Das heisst das Massen, Spin und Ladung von Teilchen und Antiteilchen gleich sein müssen. experimentell sehr genau verifiziert. $m_{K^0} - m_{\bar{K}^0}/m < 10^{-18}$, $q_{e^+} - q_{e^-} < 10^{-18}$. [Per91], page 100.

Hingegen wurde eine kleine CP Verletzung gefunden (siehe später). Deshalb sollte im gleichen Masse auch T verletzt sein. Dies stellt eine neue Motivation für EDM Experimente vor allem an Neutronen dar.

1.2.4 Flavourquantenzahlen

Wie in der Einleitung gezeigt, existieren im ganzen 6 Quarks und 6 Leptonen, mit verschiedenen *Flavours*. Sie werden in 3 Generationen beobachtet.

Die **Flavorsymmetrie** besagt, dass die starke Wechselwirkung nicht vom Flavor (sondern nur von der Farbe) abhängt. Die Prozesse der starken Wechselwirkung und deren stark gebundenen Teilchenzustände (Mesonen, Baryonen) sind von der Flavor unabhängig.

Für Vorgänge der e.m. und der starken WW bleibt die Quark bzw. Leptonflavour erhalten. Die Flavor Isospin (up, down), strangeness, beauty, truth sind relative gute Quantenzahlen. Beispiele: $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ lebt nur sehr kurz ($4 \times 10^{-24}s$), $\phi \rightarrow K^+K^-$ ebenfalls (1.6×10^{-22}). Diese Reaktionen verändern nicht die Flavourzahlen.

Aber wenn wir die schwache Wechselwirkung einbeziehen, können sich die Flavourzahlen ändern, allerdings unwahrscheinlicher, drum grössere Lebensdauern: $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$ lebt 26 ns, $K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$ oder $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ ($K^+ = u\bar{s}$) lebt 12 ns.

Auch $\Lambda \rightarrow \pi p$: Man sieht nicht immer ein Lepton, aber trotzdem schwache WW. 0.2 ns Also: Die schwache Wechselwirkung kann Quarks bzw. Leptonen der gleichen Generation umwandeln: (anderes Beispiel: "charged current" - Elektronstreuung). Die Kopplung der Quarks an die schwache Wechselwirkung wird durch eine Matrix, die sogenannte *CKM Matrix* beschrieben. Sie ist eine 3x3 Matrix, die uns jeweils die Kopplung eines W's von jedem +2/3 Quark zu jedem -1/3 Quark angibt. (siehe später unter schwacher WW von Quarks).

Die Kopplung zwischen den Generationen ist schwächer, im Quarksektor etwa um einen Fünftel. Es ist aber bisher kein Prozess bekannt, der direkt Quarkflavours derselben Ladung ineinander umwandelt (no *FCNC*, flavor changing neutral current).

Die **Isospinsymmetrie** (Transformation $u \leftrightarrow d$) transformiert mit einem Vorzeichen, wie wir beim Zusammenbau der Baryonen gesehen haben. Das hat beim Zusammenbau und bei den Zerfällen der Mesonen eine Bedeutung: Es sind nämlich die Triplettzustände antisymmetrisch unter der Vertauschung $u \leftrightarrow d$ und die Singulettzustände symmetrisch. Dies ist gerade umgekehrt, wie beim normalen Spin. Die leichtesten Mesonen mit $l = 0$ heissen:

	$\uparrow\downarrow: J^{PC} = 0^{-+}$	$\uparrow\uparrow: J^{PC} = 1^{--}$
$u\bar{d}$	π^+	ρ^+
$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	π^0	ρ^0
$d\bar{u}$	π^-	ρ^-
$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	(η)	ω

(Das η enthält auch noch ein $s\bar{s}$ Anteil. Der dazu orthogonale Zustand heisst η' . Im Gegensatz dazu ist bei den Vektromesonen das Φ ein reines $s\bar{s}$. Siehe [PDG00], Seite 117)

Die Kombination von C-Parität und Eigenwert von Isospineigenzuständen heisst auch G-Parität. Man sieht damit zum Beispiel, dass der Prozess $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-$ in der starken Wechselwirkung verboten ist: Wendet man darauf die Isospinsymmetrie $u \leftrightarrow d$ an, vertauschen die beiden Pionen und bekommen wegen der Antisymmetrie des Flavortripplettzustandes beide ein Vorzeichen. Die C-Transformation tauscht die beiden (ohne Vorzeichen) zurück, das kombinierte Vorzeichen dieser beiden Operationen ist für jedes Pion negativ (“die G-Parität von Pionen ist negativ”). Das kombinierte Resultat für die beiden Teilchen im Endzustand ist also positiv. Die gleichen beiden Symmetrietransformationen auf den Anfangszustand ω angewendet, ergibt für die $u \leftrightarrow d$ Vertauschung ein +, für die C-Parität aber ein -, gesamthaft also ein -: Die G-Parität von ω ist negativ. Damit ist die Symmetrie nicht erhalten, und die starke Wechselwirkung kann diesen Prozess nicht erklären ([Povh95], Seite 188). Trotzdem findet er als elektromagnetischer Prozess statt, wegen der kleineren Kopplungskonstanten α allerdings viel seltener.

In der Tat zerfällt das ω hauptsächlich als $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$. Hier gibt es drei negative Vorzeichen unter der Isospinsymmetrie im Endzustand, deshalb ist der Prozess erlaubt.

Die G-Parität von ρ und η ist entsprechend also positiv.

Bei den **Leptonen** sind erst im vorletzten Jahr erstmals Übergänge zwischen den Neutrinos verschiedener Generationen beobachtet worden, abgesehen von diesem kleinen Effekt, gilt die *Leptonzahlerhaltung* generationsweise (Lepton – Familien – zahl):

$$L_e = N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e)$$

$$L_\mu = N(\mu^-) - N(\mu^+) + N(\nu_\mu) - N(\bar{\nu}_\mu)$$

$$L_\tau = N(\tau^-) - N(\tau^+) + N(\nu_\tau) - N(\bar{\nu}_\tau)$$

Beispiel Muonzerfall: Da die Masse des Muons kleiner als das leichteste Hadron (π) ist, kann es nicht in Hadronen zerfallen, es bleibt nur der leptonische Zerfall: $\mu^+ \rightarrow \nu_\mu + e^+ + \nu_e$ ist erlaubt, aber $\mu^+ \rightarrow e^+ + e^- + e^+$ ist verboten.

Da das Elektron das leichteste Teilchen mit el. Ladung ist, muss es stabil sein.

Das τ hat eine Masse von 1.77 GeV, und in der Tat werden eine Unzahl verschiedene Zerfälle auch in Hadronen beobachtet.

Durch die neuerdings beobachtete *Neutrinoszillation* (z.B. zwischen ν_μ und ν_τ) in Neutrinos von der Sonne und aus der Atmosphäre wird die Leptonzahl offenbar nicht mehr generationsweise erhalten. Deshalb sucht man nun auch wieder nach der Reaktion $\mu \rightarrow e\gamma$. Bisheriger Limit 4.9×10^{-11} .

1.2.5 Eigenschaften elementarer Teilchen und ihre Messung

Zusammenfassend wollen wir die relevanten Eigenschaften von elementaren Teilchen aufzählen, mit gleichzeitigem Hinweis auf die *Messmethode*. Letztere ist meistens un-

terschiedlich, je nach dem ob es sich um ein langlebiges (L:) (also im Detektor einen endlichen Weg zurücklegendes oder ein kurzlebigen (K:) Teilchen handelt:

- *Masse:*

K: Durch Berechnung der invarianten Masse aus den Energien der Zerfallsteilchen.
z.B. $\phi \rightarrow KK$.

$$m^2 = p^\mu p_\mu = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \quad (1.36)$$

Wenn die Zerfallsteilchen besonders hochrelativistisch sind, (z.B. $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) wird die Gleichung:

$$m^2 = (E_1 + E_2)^2 - (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha) = 2E_1E_2(1 - \cos \alpha) \quad (1.37)$$

L: Gleichzeitiges Messen von Flugzeit und Impuls im Magnetfeld.

- *el. Ladung:*

K: Summe der Ladungen der Zerfallsprodukte

L: Ablenkungsrichtung im Magnetfeld

- *Spin:*

K: Die Spins der Zerfallsteilchen müssen ausgerichtet/polarisiert werden. Dann kann man eine Winkelverteilung der Zerfallsteilchen beobachten, die vom SPIN abhängt.

L: Reaktion mit einem polarisierten Target beobachten.

- *Lebensdauer:*

K: Breite der Massenunschärfe ($\Delta M \cdot \tau = 1$: z.B. ρ : $\Delta M = 150$ MeV, $M = 770$ MeV).

L: Direkt durch Zerfallslänge und im Impuls

$$x = \gamma\beta c\tau = \frac{p}{m}c\tau \quad (1.38)$$

- *diskrete Quantenzahlen:*

K: durch die Quantenzahlen der Zerfallsprodukte. Dabei sind die C, P, T Quantenzahlen multiplikativ zu nehmen, die elektrische Ladung und die Flavourquantenzahlen sind additiv zu rechnen. Aber aufgepasst: Bei schwacher WW wird C und P Erhaltung verletzt. l: Reaktion mit einem bezüglich C,P,T festgelegten Target.

Kapitel 2

Werkzeuge

2.1 Wie arbeitet der exp. Teilchenphysiker?

2.1.1 Wirkungsquerschnitt und Lebensdauer

29.11.01

Die Lebensdauer von Teilchen und der Wirkungsquerschnitt einer Reaktion sind die wichtigsten der in der experimentellen Teilchenphysik zugänglichen Messgrößen.

Der *Wirkungsquerschnitt* σ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Teilchen a und b miteinander wechselwirken



wobei X der Endzustand aus mehr oder weniger vielen Teilchen bestehen kann. Man unterscheidet *fixed target* Experimente, wo Teilchen aus einem Beschleuniger auf eine ruhende Probe geschossen werden, und *collider* Experimente, wo zwei Teilchenstrahlen zur Kollision gebracht werden

Man nimmt an, dass

- die Teilchendichte in Strahl und Target so klein ist, dass es keine Interferenzeffekte durch Streuung an mehreren Targetteilchen gibt.
- die Reaktionsprodukte X die Reaktionszone ungestört verlassen können.
- die Strahlteilchendichten so klein sind, dass es keine Wechselwirkung zwischen ihnen gibt.

Der Fluss $\phi = vn_a$ der einfallenden Teilchen pro Zeiteinheit und Fläche ist proportional zu deren Geschwindigkeit v und der Teilchen-Strahldichte n_a (Teilchen pro Volumen).

Die *Reaktionsrate* W für fixed target Experimente, also die Zahl der beobachtbaren Reaktionen pro Zeiteinheit, wird ausserdem proportional zu der Zahl der Teilchen N im Target, die vom Strahl beleuchtet werden und der *Effektivität* η der Detektorapparatur, diese Reaktion zu messen:

$$W = \phi \cdot N \cdot \eta \cdot \sigma \quad (2.2)$$

Für collider Experimente wird

$$W = \frac{f_0 n_1 n_2}{A} \cdot \eta \cdot \sigma =: L \cdot \eta \cdot \sigma \quad (2.3)$$

Hier sind nun n_1 und n_2 die Zahl der Teilchen pro Paket im Beschleuniger, die sich mit der Frequenz f_0 im Zentrum der Detektoren kreuzen und A die Querschnittsfläche mit der sich die beiden Strahlen überschneiden. Die Grösse $L = f_0 \cdot n_1 \cdot n_2 / A$ wird als *Luminosität* bezeichnet.

σ hat also die Dimension einer Fläche und wird oft in *barn* angegeben:

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 \quad 1 \text{ mb} = 0.1 \text{ fm}^2 = 2.5 \text{ GeV}^{-2} \quad (2.4)$$

Gleichung 2.3 faktorisiert also die gezählten Ereignisraten in drei Teile: Die Luminosität hat die Einheit $\text{Fläche}^{-1} \text{sec}^{-1}$ und wird nur durch den experimentellen Aufbau des Beschleunigers bestimmt. η beschreibt den Detektor, wobei man meist unterscheidet zwischen der geometrischen Akzeptanz und der Ansprechwahrscheinlichkeit (Efficiency) der Detektoren. Dann ist η das Produkt dieser zwei Grössen. σ beschreibt die physikalischen Vorgänge der eigentlichen Wechselwirkung.

Man beachte, dass σ lorentzinvariant gegenüber Transformationen in der Strahlrichtung ist! Man kann sich σ anschaulich als die Fläche vorstellen, innerhalb der ein Teilchen in der Lage ist, zu wechselwirken.

η enthält sowohl geometrische Faktoren - der Bruchteil der Raumrichtungen in den Teilchen detektiert werden können (Raumwinkel), als auch Ansprechwahrscheinlichkeiten der Detektoren.

Man unterscheidet

- totaler WQ: $a + b \rightarrow \text{anything}$
- differentieller WQ: Abhängigkeit von diversen Parametern, z.B. $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial E}$, usw.
- inklusiver WQ: $a + b \rightarrow c + X$, wobei X beliebig (und meist $c = a$)
- exklusiv: ein bestimmter Ausgangskanal zum Beispiel $a + b \rightarrow c + d$,
- elastisch: $a + b \rightarrow a + b$
- inelastisch: alles ausser elastisch.

Der Wirkungsquerschnitt σ als Funktion der verschiedenen kinematischen und anderen Parametern ist die Messgrösse des Experimentators. σ kann umgekehrt zum Beispiel aus der räumlichen Ladungsverteilung des Targetteilchens berechnet werden.

Als Beispiel diskutieren wir hier die hadronischen Wirkungsquerschnitte der Streureaktionen pp und $\bar{p}p$ (siehe [PDG00], Abb. 37.19):

Zuerst stellen wir fest, dass bei sehr kleinen Schwerpunktsenergieen der Wirkungsquerschnitt für pp rein elastisch ist, und stark mit der Energie abfällt, wie wir das für punktförmige Teilchen erwarten. Die dominierende WW ist zuerst elektromagnetisch, es wird ein Photon ausgetauscht. Der WQ geht propotional zu $1/s$ (siehe 2.1.3). Bei grösseren Energieen kommt die starke WW ins Spiel, vorerst durch Austausch eines virtuellen Pions, dessen Propagator durch die endliche Ruhemasse des Pions kleiner ist.

Bei einer Schwerpunktsenergie grösser als $2m_p + m_\pi \approx 2.1\text{GeV}$ kann ein reelles Pion produziert werden, von jetzt an dominiert der inelastische WQ über den elastischen. Der totale WQ ist jetzt über mehrere Grössenordnungen der Energie fast konstant.

Ein solches konstantes Verhalten eines WQ erhält man unter der Annahme, dass die Teilchen sich wie Scheiben mit festem Radius R verhalten, es wird rein geometrisch $\sigma = 4\pi R^2$. Aus dem gemessenen σ_{tot} von etwa 40 mb erhält man $R \approx 0.5$ fm, was etwa dem Radius des Protons entspricht. Eine solche Annahme führt auch zu Beugungsmustern (Diffraktion), an einem kreisförmigen Gegenstand. In der Tat beobachtet man Diffraktion bei der Messung vom differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ von hadronischen Streuprozessen, siehe zum Beispiel [Povh95], Seite 64.

In diesem Bereich ist der $\bar{p}p$ etwa gleich gross, wie der pp , da die Gluon-Gluon Wechselwirkung dominiert, wohingegen die Quark-Antiquark Annihilationen bei kleinen Energien dominieren. Bei sehr grossen Energien nimmt der WQ langsam wieder zu.

Die *Lebensdauer* τ eines Teilchens ist die Konstante im Exponenten der e Funktion: $N = N_0 e^{-t/\tau}$. Das Inverse davon heisst Zerfallsrate $\Gamma = 1/\tau$. Bei längerlebigen Teilchen gibt man oft die die Lebensdauer in Einheiten $c\tau$, also cm an, der mittlere Weg λ der ein hochrelativistisches Teilchen zurücklegt, bevor es zerfällt. Genauer gilt $\lambda = \beta\gamma\tau$. Wegen der Unschärferelation gilt $\Delta M \cdot \tau = 1$, die Masse eines sehr kurzlebigen Teilchens ist also nicht genau bestimmt. Versucht man sie zu messen, erhält man eine Verteilung der Masse mit einer Breite $\Delta M = \Gamma$.

2.1.2 Kinematik I

(in den Uebungen behandelt)

Hier wollen wir die zum Teil bereits verwendeten Zusammenhänge der speziellen Relativitätstheorie, die für die Teilchenphysik relevant sind, zusammenstellen. Wir stellen die 4-dim *Raumzeitkoordinate* als $x^\mu = (t, \vec{x})$ dar, also zum Beispiel auch $p^\mu = (E, \vec{p})$.

Das Skalarprodukt der Metrik

$$m^2 = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = p_\mu p^\mu \quad g^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

(wobei über gleiche Indizes zu summieren ist) ist lorentzinvariant. Offensichtlich ist m gerade die Ruhemasse eines Teilchens. $g_{\mu\nu}$ heisst der *metrische Tensor*, die angegebene Definition gilt für die flache Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie.

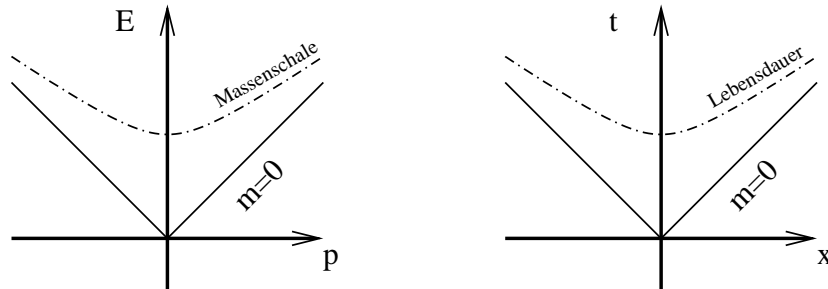
Die *Lorentztransformationen* zwischen zwei sich mit Geschwindigkeit β gegeneinander bewegenden Systemen kann man sich am besten in Matrixschreibweise merken:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.6)$$

p_{\perp} bleibt unverändert. Insbesondere gelten für ein einzelnes Teilchen mit Ruhemasse M , die folgenden Zusammenhänge

$$E = \gamma M \quad |p| = \beta\gamma M = \beta E \quad (2.7)$$

Daraus verifiziert man leicht, dass $E^2 - p^2 = M^2$ ist. Man sagt ein Teilchen liegt auf seiner *Massenschale*, wenn es diese Bedingung erfüllt. Kurzzeitig kann es im Rahmen der Unschärferelation davon abweichen, das ist insbesondere bei WW Quanten der Fall. Das Teilchen wird *virtuell*, die Abweichung von der Massenschale heisst die Virtualität.



Die *Lebensdauer* τ eines Teilchens wird im Ruhesystem angegeben, aus der Matrix kann man für die Flugstrecke in einem anderen System ablesen $x = \beta\gamma\tau$ und $t = \gamma\tau$. Offensichtlich ist $t^2 - x^2 = (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)\tau^2 = \tau^2$ ebenfalls lorentzinvariant. In der linken Skizze erkennt man, wie die Lebensdauer für verschiedene, am Ort $x^\mu = (0, 0)$ startende Weltlinien die Lebensdauer von der Geschwindigkeit abhängt, und auf dem *Lichtkonus* $t^2 = X^2$ unendlich wird.

Schiessen wir nun ein Strahl von Teilchen m_b mit Energie E_b im Laborsystem auf ein ruhendes Target mit Masse m_t . Die gesamte Energie im Laborsystem wird dann $E_L = \sqrt{m_b^2 + p_{bL}^2} + m_t$. Die Energie E_{CM} im Schwerpunktsystem (das System, indem $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$) berechnet man am einfachsten über die invariante Masse des Gesamtsystems,

das ja eine lorentzinvariante sein muss. Man drückt einfach M einmal in den Größen des Laborsystems und einmal in den Größen des c.o.m. aus:

$$\text{im Labor: } M^2 = E_L^2 - p_L^2 = m_b^2 + m_t^2 + 2m_t E_b, \quad (2.8)$$

$$\text{im c.o.m.: } M^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = E_{CM}^2 \quad (2.9)$$

Die relative Geschwindigkeit der beiden Bezugssysteme gegeneinander erhält man leicht aus

$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{p_{bL}}{E_b + m_t} \quad (2.10)$$

Oft ist E_b gross gegen alle vorkommenden Massen, dann wird $E_{CM} \approx \sqrt{2m_t E_b}$.

Für colliding beam Experimente mit zwei Strahlen der Energie E_1 und E_2 wird $E_{CM}^2 = M^2 = (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 \approx 4E_1 E_2$, bei einem symmetrischen Beschleuniger also insbesondere gerade das Doppelte der Beamenergien. Beispiel: HERA am DESY: $e \times p = 27.5 \times 920 \text{ GeV}^2$, also $E_{CM} = 318 \text{ GeV}$. Hier geht E_{CM} also linear mit der mittleren Beschleunigerenergie, während bei einem fixed target Experiment sie nur mit der Wurzel der Beamenergie geht.

In einem Prozess mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen

$$A + B \rightarrow C + D \quad (2.11)$$

gibt es ausser den Massen nur zwei unabhängige Variablen, zum Beispiel die Energie der einlaufenden Teilchen und der Streuwinkel θ . Deren Werte hängen allerdings vom Bezugssystem ab. Es werden die Mandelstamvariablen als Funktion der 4er-Impulsvektoren definiert:

$$s = (p_A + p_B)^2 \quad \text{Schwerpunktsenergie}^2 \quad (2.12)$$

$$t = (p_A - p_C)^2 \quad \text{Impulsübertrag}^2 \quad (2.13)$$

$$u = (p_A - p_D)^2 \quad \text{gekreuzter Imp.-übertrag}^2 \quad (2.14)$$

Statt t schreibt man oft q^2 . Man zeigt leicht, dass

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 \quad (2.15)$$

Die Mandelstam Variablen sind lorentzinvariant, sie eignen sich deshalb besser als Variablen, um den Streuprozess und die Übergangsmatrix \mathcal{M} anzugeben.

2.1.3 Streumatrix und Feynmanregeln

5.12.01

Diese Ausführungen folgen der Darstellung von [Halz84], Kap. 6. Es handelt sich nicht um eine vollständige Darstellung, stattdessen soll die Vorgehensweise, um einen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, anhand der folgenden zwei Beispiele erster Ordnung dargestellt werden.



Wir streuen also zwei unterscheidbare Fermionen aneinander. Der linke Prozess passiert typisch in einem e^-e^+ Collider, der rechte typischerweise bei μ -Streuung an den Elektronen eines festen Targets.

Den linken Prozess nennt man s-Kanalstreuung, den rechten t-Kanalstreuung, in Anlehnung an die charakteristische Mandelstamvariable für das Austauschboson der Wechselwirkung:

$$\text{s-Kanal: } s = (p_A + p_B)^2 \quad (2.16)$$

$$\text{t-Kanal: } t = (p_A - p_C)^2 \quad (2.17)$$

Die Bewegungsgleichung für freie Fermionen ist die bereits eingeführte Diracgleichung:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = 0 \quad (2.18)$$

Die ψ sind 4-komponentige Zustände entsprechend den zwei möglichen Helizitätszuständen von Fermion und zugehörigem Antifermion. Für freie Teilchen kann man die Ortsabhängigkeit faktorisieren, es wird:

$$\psi = u(\vec{p}) \cdot e^{-ip \cdot x} \quad (2.19)$$

Die $u(\vec{p})$ sind orts- und zeitunabhängig und nur durch den Impuls charakterisiert. Sie heißen Spinoren.

Beeinflussen wir nun unser Teilchen durch ein elektromagnetisches Feld. Wie man in der Elektrodynamik lernt, muss man dann in der lorentzinvarianten Darstellung den Impuls ersetzen durch:

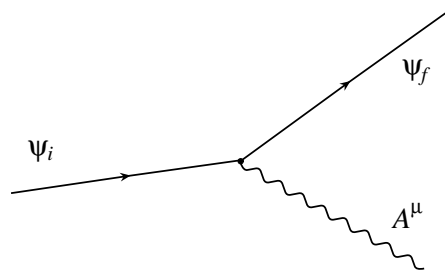
$$p^\mu \rightarrow p^\mu + e \cdot A^\mu \quad A^\mu = (A^0, \vec{A}) \quad (2.20)$$

(Für die erste Komponente dieser Gleichung ist dieses Vorgehen besonders anschaulich: Zur Gesamtenergie muss noch die potentielle Energie ($e \cdot A^0$) der Ladung im elektrischen Feld addiert werden.)

Machen wir diese Ersetzung in der Diracgleichung, erhalten wir:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = -e\gamma_\mu A^\mu \psi \quad (2.21)$$

Das freie Teilchen steht auf der linken Seite der Gleichung, ohne el. magnetische beeinflussung (ohne "Störung" wie man sagt) wird das null. Die rechte Seite stellt die Störung dar. Die kleinste mögliche Störung ist ein einzelnes Photon, das an der durchlaufenden Fermionlinie angreift:



Das Problem der Streuung wird nun mit Hilfe von Störungstheorie weiter behandelt (siehe [Halz84], Seite 79-80). Wir gehen wie in der klassischen Störungstheorie vor: Es seien ϕ_n der zeitunabhängige Teil der Lösungen der Schrödingergleichung des freien Teilchens:

$$H_0 \phi_n(\vec{x}) = E_n \cdot \phi_n(\vec{x}) \quad (2.22)$$

mit n der Hauptquantenzahl und E_n den Energieeigenwerten.

Nun schalten wir eine zeitabhängige Störung mit Potential $V(\vec{x}, t)$ ein. Die Schrödingergleichung wird dann modifiziert durch

$$(H_0 + V(\vec{x}, t)) \psi(\vec{x}, t) = i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.23)$$

Zur Lösung macht man den Ansatz:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}) \cdot e^{-iE_n t} \quad (2.24)$$

Dieser Ansatz wird eingesetzt und daraus erhält man Differentialgleichungen für die a_n . Nehmen wir nun einen festen Zustand f (den Endzustand wie wir noch sehen werden), multiplizieren wir diese Differentialgleichung mit ϕ_f^* , integrieren über das Volumen und verwenden die Orthonomiertheit der Zustandsfunktionen, erhält man

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \int \phi_f^* V \phi_n d^3x e^{i(E_f - E_n)t} \quad (2.25)$$

Weiter nehmen wir nun an, dass das Potential nur aktiv ist zwischen der Zeit $t = -T/2$ und $t = +T/2$, müssen wir nur über diese Periode integrieren um den Endzustand zu bekommen. Schliesslich nehmen wir an, dass vor $T/2$ nur ein Zustand aktiv ist, wir nennen ihn $n = i$. Es wird dann

$$T_{fi} := a_f(t \rightarrow \infty) = -i \int_{-T/2}^{+T/2} dt \int d^3x [\phi_f(\vec{x}) e^{-iE_f t}]^* V(\vec{x}, t) [\phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t}] \quad (2.26)$$

In kovarianter Form und mit der Ersetzung $\phi \rightarrow \phi e^{-iEt}$ erhält man

$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) \quad (2.27)$$

Die T_{nm} bilden die sogenannte *T - Matrix* der Streutheorie. Das Betragsquadrat eines Elementes T_{fi} besagt, wie wahrscheinlich aus einem Ursprungszustand i ein Endzustand f entsteht, wenn ein zeitlich beschränkte, kleine Störung eingeschaltet wird. Die T_{fi} heissen auch *Streuamplitude*.

Versuchen wir nun durch Analogie diesen Mechanismus auf unser Diracelektron anzuwenden. Die Störung lautet also nach Gleichung (2.21) $V = -e\gamma_\mu A^\mu$. Die T-Matrix wird dann

$$T_{fi} = -i \int d^4x \bar{\psi}_f (-e\gamma_\mu A^\mu) \psi_i \quad (2.28)$$

Dabei haben wir in Analogie zum komplex-konjugierten ϕ^* den *adjungierten Spinor* benützt, der wie folgt definiert ist:

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.29)$$

wo ψ^\dagger die hermitisch-konjugierte Matrix von ψ ist. Für $\bar{\psi}$ gilt die adjungierte Diracgleichung des freien Teilchens

$$p^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu + m\psi = 0 \quad (2.30)$$

Zusammen mit der freien Diracgleichung für ψ und der quantenmechanischen Ersetzung $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$ kann man sofort sehen, dass für die Grösse

$$j^\mu := -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.31)$$

gilt, dass es sich also um eine Erhaltungsgrösse handelt. Man identifiziert sie mit dem elektrischen 4er - Strom $j_\mu = (\rho, \vec{j})$, wo ρ die Ladungsdichte und \vec{j} die dreidimensionale Stromdichte darstellt.

In Gleichung (2.28) können wir nun den sogenannten *transition current* identifizieren. Wir definieren

$$j_{fi}^\mu := -e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_i \quad (2.32)$$

das stellt also gewissermassen den durchlaufenden Strom der Fermionlinie in der obigen Abbildung dar. Wir setzen diesen Ausdruck in Gleichung (2.28) ein und erhalten für die T-Matrix:

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_{fi}^\mu A_\mu \quad (2.33)$$

Dieser Ausdruck beschreibt also wie eine elektromagnetische Störung A^μ (ein Photon) mit dem Uebergangstrom verknüpft ist.

Um nun den gesamten Streuprozess in dem am Anfang dieses Abschnittes gezeigten Graphen mit zwei Fermionen zu beschreiben (zum Beispiel die t-Kanal Streuung), brauchen wir auch zwei verschiedene Ströme. Der zweite Strom $j_{(2)}^\mu$ muss dabei das elektromagnetische Feld A^μ erzeugen. Dafür sind die Maxwellgleichungen zuständig:

$$\square A^\mu = j_{(2)}^\mu \quad (2.34)$$

Wegen

$$\square e^{iqx} = -q^2 e^{iqx} \quad \text{und} \quad \psi = u(p) \cdot e^{-ipx} \quad (2.35)$$

ist der Ausdruck

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} \cdot j_{(2)}^\mu \quad \text{mit} \quad q := p_f - p_i \quad (2.36)$$

eine Lösung der Maxwellgleichung.

Setzen wir das alles in die Gleichung (2.33) ein, und verwenden die Bezeichnung $u_A := u(p_A)$ usw. erhalten wir schliesslich

$$T_{fi} = -i \int (-e\overline{u}_C \gamma_\mu u_A \cdot e^{i(p_C - p_A)x}) \left(-\frac{1}{q^2}\right) (-e\overline{u}_D \gamma_\mu u_B \cdot e^{i(p_D - p_B)x}) d^4x \quad (2.37)$$

Da nur die Terme in den Exponenten eine x Abhängigkeit haben, ist die Integration leicht, es wird somit

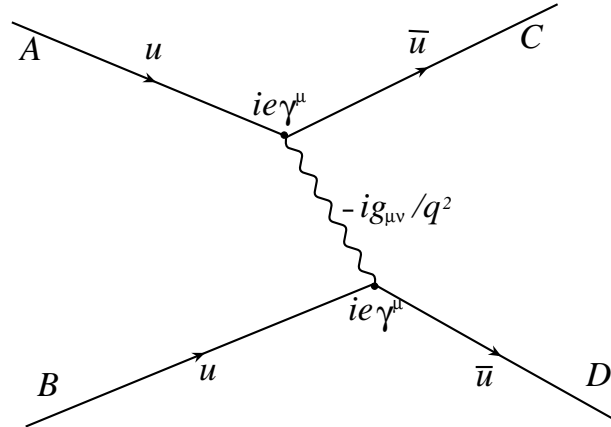
$$T_{fi} = -i(-e\overline{u}_C \gamma_\mu u_A) \left(-\frac{1}{q^2}\right) (-e\overline{u}_D \gamma_\mu u_B) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \quad (2.38)$$

Die Deltafunktion stellt die Energie-Impuserhaltung sicher. Die drei ersten Klammern bezeichnet man zusammen oft als *Matrixelement* \mathcal{M}_{fi} , es enthält die Physik des Streuprozesses. Es ist dieser Ausdruck, den wir mit Hilfe der Feynammregeln direkt aus den Grafen gewinnen können. Wir erkennen insbesondere den schon erwähnten Propagator mit der Virtualität des Austauschbosons im Nenner. Die einfachsten Regeln, die man 6.12.01 für unseren Ersteordnung - Prozess braucht, lauten:

1. Einlaufende Antifermionen oder auslaufende Fermionen ergeben einen Faktor $\overline{u(p)}$.
2. Ein Vertex trägt einen Faktor $ie\gamma^\mu$ bei.
3. Einlaufende Fermionen oder auslaufende Antifermionen ergeben einen Faktor $u(p)$.
4. Ein virtueller Propagator mit Ruhemasse M ergibt einen Faktor $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 - M^2}$.

Man überzeuge sich, dass diese Regeln auf diesen Feynmandiagramm angewendet, tatsächlich das angegebene Matrixelement ergeben, und dass dieses mit dem ersten Teil der Gleichung (2.38) übereinstimmt:

$$\mathcal{M} = \bar{u}_C(ie\gamma^\nu)u_A \cdot \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) \cdot \bar{u}_D(ie\gamma^\mu)u_B \quad (2.39)$$



Man erkennt aus den Regeln, dass das Matrixelement nicht von der Lage des Grafen in den Orts-Zeitkoordinaten abhängt. Rotiert man den Grafen werden unter Umständen aus einlaufenden Fermionen auslaufende Antifermionen etc. Das ändert aber nach Regel 3 das Matrixelement nicht. Deshalb ist das Matrixelement für die beiden eingangs erwähnten Fälle s-Kanal und t-Kanal Streuung gleich! Ein Unterschied ergibt sich erst bei der im folgenden dargestellten Berechnung des Wirkungsquerschnittes.

2.1.4 Vom Matrixelement zum Wirkungsquerschnitt

Eine ausführliche Darstellung dieses Schrittes findet man bei [Halz84], Kapitel 4.3. Die allgemeine Behandlung betrachtet die *Dichte der Endzustände* im Phasenraum und deren Normierung. Ausserdem muss man die Definition des Wirkungsquerschnittes (Gleichung 2.2) verwenden. Da es sich im wesentlichen um “Buchhaltung” handelt, wollen wir hier nur das Resultat für einen speziellen Fall angeben, der allerdings sehr häufig auftritt:

Wir betrachten den Prozess $A + B \rightarrow C + D$. Im Schwerpunktsystem (c.m.) seien die Impulse $p_i := |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B|$, $p_f := |\vec{p}_C| = |\vec{p}_D|$ und $s = (E_A + E_B)^2$. Dann wird der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\Big|_{c.m.} = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{p_f}{p_i} \cdot \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (2.40)$$

Mit $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ ist der Mittelwert über alle vorkommenden Helizitätszustände der einlaufenden Teilchen. Im Fall unpolarisierter einlaufender Teilchen (das heisst es kommen

alle Helizitäten gleich häufig vor) muss man genauer über die einlaufenden Helizitäten mitteln, und über die erlaubten Helizitäten im Endzustand summieren. Das heisst es wird

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} := \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum |\mathcal{M}|^2 \quad (2.41)$$

Dabei läuft die Summe über aller möglichen Spinkombinationen der vorkommenden Spinoren. (Beachte, dass die verschiedenen Helizitätskombinationen unterscheidbare Prozesse sind, es gibt deshalb keine Interferenzen, man muss also die Wahrscheinlichkeiten der Einzelprozesse addieren). Jetzt hängt das Resultat also davon ab, wie der Feynmangraph im Orts-Zeitdiagramm rotiert ist, d.h. welche Teilchen die EIngangs- und welche die Ausgangszustände sind.

Die konkrete Ausrechnung der Matrixelemente ist nicht ganz trivial. Man erhält Summen von Produkten der Spinoren $u \cdot \bar{u}$. Dabei ist die sogenannte *completeness relation* von Nutzen. Diese lautet

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \gamma^\mu p_\mu + m \quad (2.42)$$

Die Summe über die beiden Helizitäten der Spinoren ist also ein bekannter Ausdruck. Nach einiger Rechnerei erhält man für unseren Prozess im t-Kanal das folgende Resultat für die Spinsumme, wobei jetzt die Bezeichnungen lauten: Das Elektron hat Impulse k und k' und Masse m , das Muon hat Impulse p und p' und Masse M , alle Impulse im Schwerpunktsystem.

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} [(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m^2(p' \cdot p) - M^2(k' \cdot k) + 2m^2 M^2] \quad (2.43)$$

\mathcal{M} enthält nach Gleichung (2.39) zwei Faktoren e , was das e^4 erklärt. Es kommen weiter in \mathcal{M} jeweils vier Faktoren mit u vor, nach der completeness relation entspricht das zwei Impulsfaktoren, was die vierfachen Produkte der Impulse erwarten lässt. Das q^4 im Nenner ist nichts anderes als der Propagator im Quadrat.

Betrachten wir weiter den hochrelativistischen Spezialfall, wo wir beide Massen m und M vernachlässigen können, wird das Resultat besonders einfach und anschaulich. Wir verwenden in diesem Grenzfall die Beziehungen $s = 2k'p' = 2kp$ und $u = -2k'p = -2kp'$, sowie $t = q^2$ und erhalten

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \quad \text{t-Kanal} \quad (2.44)$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2} \quad \text{s-Kanal} \quad (2.45)$$

(Für den Fall des s-Kanals musste man in Gleichung (2.43) $k' \leftrightarrow -p$ vertauschen). Man beachte, dass diese Ausdrücke nun wieder lorentzinvariant sind, wie wir das vom Wirkungsquerschnitt natürlich erwarten!

Der **Zerfall eines Teilchens** wird immer von einer Wechselwirkung dominiert, und kann mit Feynmangraphen dargestellt und berechnet werden. Insbesondere ist die Zerfallsrate $\Gamma = 1/\tau \propto |\mathcal{M}_{if}|^2$.

Beispiel: Beim $\mu \rightarrow e\nu_e\nu_\mu$ Zerfall handelt es sich ebenfalls um einen ähnlichen Feynmangraphen wie oben. Für die Vertexfaktoren und den Propagator bekommen wir im Matrixelement bei kleinen Energien ($q^2 \ll M_W^2$)

$$\mathcal{M}_{if} \propto \frac{g_W}{(p^2 - M_W^2)} = \frac{g_W}{M_W^2} \quad (2.46)$$

Man definiert die *Fermikonstante* mit

$$G_F := \frac{g_W^2}{m_W^2} = 1.16639(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (2.47)$$

eine offensichtlich sehr kleine Zahl. Darum heisst die schwache Wechselwirkung “schwach”, was aber nur für kleine Energien richtig ist. Die Lebensdauer von Teilchen mit schwachen Zerfällen ist deshalb typisch um G_F^2 , also um 10 Grössenordnungen länger als elektromagnetische oder starke Zerfälle und liegt im Bereich von 10^{-9} sec.

Das Matrixelement im Quadrat z.B. für Neutrinostreuung an Quarks (Atomkernen) im t-Kanal steigt daher nach Gleichung (2.44) im wesentlichen mit s^2 an, der Wirkungsquerschnitt wegen (2.40) immer noch mit s , er ist also proportional zu $E^2 \cdot G_F^2$.

Ein anderes Beispiel für einen Feynmangraphen erster Ordnung ist die **Comptonstreuung**. Hier ist allerdings der Propagator ein Fermion, und es gibt externe Photonlinien. Die Feynmanregeln für diesen Fall sehen etwas anders aus. Im weiteren gibt es auch noch die Fälle **höherer Ordnung** wo mehr interne Linien und loops zu berücksichtigen sind. Ein vollständigere Liste der Feynmanregeln findet man zum Beispiel in [Halz84].

2.1.5 Streuexperimente und Resonanzproduktion

In der Teilchenphysik stellen Streuexperimente die zentrale experimentelle Untersuchungsmethode dar. Aus der Energie- und Winkelverteilung der gestreuten Teilchen lernen wir etwas über die Wechselwirkungen. Manchmal werden auch neue Teilchen produziert, und sie zerfallen wieder, wodurch man ebenfalls einiges über die WW lernen kann.

Im hochrelativistischen Grenzfall werden die Massen aller Teilchen vernachlässigt. Die Energien aller beteiligten Teilchen sind dann gleich (!), wir bezeichnen sie mit k . Wir verwenden den Streuwinkel θ im Laborsystem und die Beziehungen $s = 4k^2$, $t = -2k^2(1 - \cos \theta) = -s \sin^2(\theta/2)$ und $u = -2k^2(1 + \cos \theta)$.

Streuung im s-Kanal: Der WQ für Annihilation von einem Fermion-Antifermion paar in ein Photon und anschliessender Paarerzeugung zweier Fermionen können wir

nun im hochrelativistischen Grenzfall mit den Gleichungen (2.40) und (2.44) angeben. Wir erhalten

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) \quad (2.48)$$

Die '1' in der Klammer steht für den Fall, dass die beiden Helizitäten der einlaufenden Teilchen gleich, der Gesamtspin also null ist, der zweite Term in der Klammer ist fuer den Fall, dass die beiden Helizitäten verschieden sind, der Gesamtspin also 1. Nur im zweiten Fall kann man im c.o.m. eine Winkelabhängigkeit beobachten.

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration über θ und ϕ :

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (2.49)$$

Streuung im t-Kanal: Lassen wir zwei unterscheidbare geladene Fermionen aneinander durch Austausch eines Photons (Ruhemasse 0) aneinander streuen, so erhält man dafür wieder aus (2.40) und (2.44)

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s \sin^4(\theta/2)} (1 + \cos^4(\theta/2)) \quad s \gg m_1, m_2 \quad (2.50)$$

Das ist nichts anderes als der hochenergetische Grenzfall der Rutherfordstreuung! Sie spielt in der Teilchenphysik eine grosse Rolle, zum Beispiel HERA: Elektron-Quarkstreuung, bestimme aus der Winkel- und Energieverteilung die Impulsverteilung der Quarks \Rightarrow erlaubt Modelle der QCD, die die Quarkdynamik im Proton beschreiben, zu testen.

Oft möchte man lieber die Abhängigkeit von $t = q^2$ haben. Mit $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ und $t = -s \sin^2(\theta/2)$ wird der Umrechnungsfaktor $d/d\Omega = (s/4\pi) d/dt$. Damit erhält man

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = 2\pi\alpha^2 \frac{1}{t^2} (1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}) \quad (2.51)$$

Man beachte, dass in diesem Prozess t negativ ist. Die '1' in der Klammer steht wieder für den Fall, dass die beiden Helizitäten der einlaufenden Teilchen gleich, der Gesamtspin also null ist, der zweite Term in der Klammer ist fuer den Fall, dass die beiden Helizitäten verschieden sind, der Gesamtspin also 1. Im Gegensatz zur s-Kanal Streuung ist hier aber in jedem Fall die Streurrate bei kleinem Winkel θ (in "Vorwärtsrichtung") viel grösser.

Resonanzproduktion: Werden zwei Teilchen aufeinandergeschossen, derart dass die Gesamtenergie $\sqrt{s} = E_1 + E_2$ gerade richtig ist, um die Masse eines neuen Teilchens zu erzeugen, spricht man von Resonanzproduktion, der Wirkungsquerschnitt dafür ist immer in einer Form proportional zur Breit-Wigner formel:

$$\sigma \sim \frac{1}{(\sqrt{s} - M)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \quad (2.52)$$

Dabei ist $\Gamma = 1/\tau$ die Massenbreite des Zustandes. Ein wichtiges Beispiel ist die resonante Z_0 Produktion in e^+e^- Kollidern, allen voran das LEP am CERN. An der Stelle $s = M_Z^2$ überlagert sich dem Wirkungsquerschnitt ein Resonanzpeak.

Die Daten von LEP zeigen den Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ als Funktion der Schwerpunktsenergie. Man erkennt den generellen Abfall des totalen WQ mit $1/s$ entsprechend der s Kanalstreuung. Überlagert ist ein Resonanzpeak bei der Energie $\sqrt{s} = m_Z$.

2.2 Beschleuniger

Es gibt zwei hauptsächliche Gründe, warum man Teilchen mit hohen Energien benötigt:

Erstens muss der Impuls der Probesteilchen umso grösser sein, je kleinere Strukturen man untersuchen will. Es gilt bekanntlich

$$\lambda = \frac{\hbar c}{p} = \frac{1}{p} \quad (2.53)$$

für die Wellenlänge und somit die erreichbare Auflösung mit Hilfe eines Teilchens vom Impuls p .

Zweitens interessieren wir uns für neue Teilchenzustände und ihre Wechselwirkungen. Wir kennen heute die Teilchen bis ca. 50...100 GeV. Was passiert zwischen diesem Wert und der Planckmasse 10^{19} GeV, wo die Wechselwirkungsstärken zusammen kommen, die Wechselwirkungen sich also vereinigen? Ist da wirklich einfach nichts (the big high energy desert), oder wird diese Gegend von Supersymmetrie-Teilchen bevölkert? Wo ist das Higgs? Gibt es vielleicht mehrere Higgs - Teilchen, wie das die Theorien der Supersymmetrien vorhersagen?

Beschleunigersysteme bestehen aus Teilchenquellen (Elektronen, Positronen, H-Ionen), Beschleunigungseinrichtungen (E-Feld: elektrostatische Beschleuniger, Hochfrequenz-Kavitäten), Fokussier- und Ablenkmagnete (B-Feld).

Für kleine Energien und als Vorbeschleuniger für Grosssysteme kommen elektrostatische Systeme in Betracht: Bandgenerator (VanDeGraaf, siehe [Frau99], Seite 15) und Cockkraft-Walton. Die maximale Energie ist beschränkt durch die maximal erzeugbare Hochspannung $E = eV$.

Linearbeschleuniger: HF Kavitäten mit Driftröhren variabler Länge. siehe [Frau99], Seite 16.

Das Feld wechselt im richtigen Zeitpunkt sein Vorzeichen. Teilchen werden in Paketen beschleunigt (bunches). Das E-Feld nimmt noch leicht zu während dem Durchgang des Paketes, sodass vorauseilende Teilchen weniger, zurückbleibende Teilchen stärker beschleunigt werden \Rightarrow Paketstruktur bleibt erhalten.

Bunchfrequenz ist ein ganzzahliger Teiler der Kavitaets HF.

Die *Bunchstruktur* der Beschleuniger kommt uns vor allem für Collider Experimente entgegen. Sie sorgt dafür, dass die Teilchen auch wirklich im Zentrum der Detektoren wechselwirken.

Gegenwärtig grösster Linearbeschleuniger in Palo Alto, Ca. SLAC. (SLC, 50 GeV). Geplant ist ein NLC (Next linear collider), 500×500 bis 1500×1500 GeV.

Im *Betatron* werden die Teilchen mittels eines Magnetfeldes auf einer Kreisbahn gehalten. Durch Erhöhen des B-Feldes entsteht ein kreisförmig induziertes elektrisches Feld, das die Beschleunigung besorgt. Die Betatronbedingung lautet:

$$B_r = \frac{1}{2} B_m \quad (2.54)$$

wo B_r das Magnetfeld bei der Kreisbahn und B_m das mittlere Feld innerhalb des Kreises bedeutet.

Das *Zyklotron* besteht aus zwei halben käseförmigen Schalen, innerhalb deren ein konstantes Magnetfeld B herrscht. Zwischen den beiden Schalen wird ein elektrisches Wechselfeld der Frequenz Ω angelegt, sodass die Teilchen bei jedem halben Umlauf zusätzlichen Impuls bekommen. Es gilt

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{\beta}{2\pi R} = \frac{\beta}{R} \quad B = \frac{p}{0.3\rho} \quad (2.55)$$

(Einheiten: GeV, Tesla, m). $R = \rho$ ist die Krümmung der Bahn. Bei fester Frequenz und Magnetfeld erhält man mit dem relativistischen Impuls $p = \gamma\beta m$ die Zyklotronbedingung

$$\frac{B}{\Omega} = \frac{\gamma m}{0.3} \quad (2.56)$$

was natürlich nur für nicht relativistische Teilchen erfüllt werden kann. Da Zyklotron eignet sich also nur für kleine Energien.

Um relativistische Teilchen zu beschleunigen braucht man ein *Synchrotron*: Die Teilchen werden auf einer festen Kreisbahn beschleunigt. Dipolmagnete, die auf dem Kreiumfang verteilt werden, halten die Teilchen auf der Bahn. Hochfrequenzkavitäten zwischen den Magneten sorgen für das Beschleunigungsfeld. Jetzt ist der Radius R der Kreisbahn, der den Umfang und die Umlauffrequenz und somit die Beschleunigungsfrequenz bestimmt, und $\rho > R$ die Krümmung der Bahn innerhalb der Ablenkmagnete nicht mehr gleich. Magnetfeld und Beschleunigungsfrequenz können nun während der Beschleunigung unabhängig voneinander so erhöht ("synchronisiert") werden, dass die Teilchen optimal auf ihrer Bahn bleiben.

Natürlich sind die Strukturen der HF Kavitäten fest, die HF kann daher nur sehr wenig variiert werden. Man kann deshalb mit einem Synchrotron nur Teilchen beschleunigen, die schon fast ein festes β haben. Es braucht also ein- oder mehrstufige Vorbeschleuniger, der in der Regel als Linearbeschleuniger gebaut werden.

In einem Synchrotron ist kein kontinuierlicher Betrieb möglich: um neue Teilchen zu beschleunigen, muss man die B-Felder herunterfahren, und neue Teilchen einschleusen. Synchrotrons eignen sich aber gut für *collider* Experimente.

Das *Isosynchrozyklotron* ist eine Mischform eines Synchrotrons und eines Zyklotrons. Der Grundaufbau ähnelt einem Zyklotron. Man hat aber statt nur zwei Halbschalen mehrerer “Kuchenstücke” von Dipolmagneten. Ihre Form ist so festgelegt, dass die Magnetfelder gegen aussen gerade soviel grösser werden, wie γ zunimmt, sodass die Zyklotronbedingung auch für relativistische Teilchen erfüllt bleibt. Die HF ist dabei immer konstant. Dadurch wird ein kontinuierlicher Betrieb möglich. Beispiel Protonbeschleuniger am PSI.

Fokussierelemente: Dazu dienen sogenannte Quadrupollinsen. Sie bestehen aus zwei aufeinanderfolgenden Quadrupolmagneten, die zu einer Fokussierung in beiden Koordinaten führen (siehe [Frau99], Seite 18). Vgl opt. Linse: Eine Sammellinse und eine Streulinse gleicher Brennweite führen netto immer zu einer Fokussierung

Betatronoszillationen: Teilchen mit gegenüber der Idealbahn leicht ausgelenkten (x, y) Koordinaten oszillieren entlang der Bahn im Quadrupolmagneten um ihre Sollposition, die Oszillationswellenlänge heisst β -Funktion (amplitude function), sie variiert im Allgemeinen entlang des Umfanges, und beschreibt die Fokussierstärke. Man muss aufpassen, dass die Zahl der Oszillationen in einem Umlauf (der sogenannte *tune*) nicht gerade eine ganze Zahl wird, sonst werden die Bahnen gerne instabil.

Um grosse Luminositäten zu haben, braucht man einen kleinen Strahlquerschnitt, also eine starke Fokussierung bei den Experimenten (kleines β^*).

Synchrotronschwingung: Dabei handelt es sich um die Schwingungen entlang der Strahlachse (Phasenschwingungen). Zu schnelle Teilchen werden durch die E-Felder in den Kavitäten gebremst, zu lange beschleunigt. Dies ergibt eine endliche Paketlänge (bunch length) der Teilchen.

Synchrotronstrahlung: Die Kreisbeschleunigung im Synchrotron führt zu Abstrahlung von Bremsstrahlungsquanten, die abgestrahlte Leistung ist

$$P = \frac{2e^2}{3\rho^2} \beta^4 \gamma^4 \approx 8.85 \times 10^{-5} \frac{E^4 [\text{GeV}]}{\rho [\text{km}]} \text{ MeV pro Umdrehung} \quad (2.57)$$

Die Energie muss natürlich zugeführt werden. Dies bestimmt vor allem für Elektronen den Umfang des Synchrotrons.

Die Synchrotronstrahlung wird allerdings auch ausgenützt: Es handelt sich um hochenergetische Photonen, die für Strukturuntersuchungen in der Festkörperphysik, Materialtechnik, Chemie und Biologie zur Anwendung kommen. Gegenwärtig wird am PSI eine Anlage aufgebaut, in der Elektronen nur zu dem Zweck in einem Synchrotron beschleunigt werden, um Synchrotronstrahlung zu erzeugen: Swiss Light Source (SLS).

Folien: CERN Beschleunigerübersicht, DESY

Tabelle aus [PDG00]: Beschleuniger

In Zukunft sind der LHC (Betrieb ca. 2006) in Bau. Daneben werden noch ein NLC, ein 100 TeV proton Collider (mit Hilfe von billigen Magneten) sowie ein Muoncollider ($\tau_\mu = 2.2 \mu\text{sec}$, aber bei hohen Energien wird das mit γ mehr) studiert.

2.3 Detektoren

13.12.01

2.3.1 Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie

Detektoren für Teilchen beruhen fast ausschliesslich auf der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den Teilchen und der Materie. (Ausnahme: hadronische Kalorimeter beruhen teilweise auf Kernkräften).

Dabei müssen wir offensichtlich zwischen ungeladenen (Photonen) und elektrisch geladenen Teilchen unterscheiden.

Der Durchgang elektrisch geladener Teilchen durch Materie hat eine Vielzahl von Effekten zur Folge. Bei kleinen Energien dominiert die Ionisation und atomare Anregungen von Elektronen, bei höheren Energien gibt es zusätzlich elektromagnetische Bremsstrahlung. Bei grossen Geschwindigkeiten gibt es zusätzliche Strahlungseffekte, wie die Cerenkovstrahlung für $\beta > 1/n$. Der gesamte Energieverlust ist dabei vor allem durch Wechselwirkung mit den Elektronen des Materials bestimmt.

Die dabei entstehende Energiedeposition im Material erlaubt die Verfolgung des Weges von Teilchen (Spurkammern) oder die Bestimmung der Gesamtenergie (Kalorimeter). Von Bedeutung für die Messgenauigkeit der Detektoren ist aber auch die Vielfachstreuung: viele kleine Richtungsänderungen der Teilchen aufgrund der elektrischen Wechselwirkung mit den Atomkernen.

Photonen wechselwirken bei kleinen Energien vor allem über den Photoeffekt, bei mittleren Energien spielt der Comptoneffekt eine Rolle, bei hohen Energien vor allem die Paarerzeugung. Die entstehenden Elektronen erfahren wiederum Bremsstrahlung usw., man spricht von *showering*.

Elektronen hoher Energie zeigen fast das gleiche Verhalten wie Photonen: Durch den Energieverlust im Material werden Bremsstrahlungsphotonen freigesetzt, welche wiederum Paarbildung machen usw. es entsteht also ebenfalls ein Schauer.

Alle diese Effekte sind stochastisch, man hat also grosse Schwankungen um einen Mittelwert. Sie sind oft alles anderen als gaussverteilt. Beispielsweise kann der Energieverlust eines geladenen Teilchens mit einer Geschwindigkeit von $\beta\gamma \approx 1$ in einem Edelgas mit einer Landauverteilung angenähert werden.

Die Bethe-Bloch Formel

beschreibt den mittleren *Energieverlust* pro Längeneinheit eines geladenen Teilchens durch Kollisionen mit den atomaren Elektronen des Materials.

Eine Teilchen der Masse M und der Ladung Ze fliege relativistisch an einem Elektron e mit Masse m im Abstand b vorbei, dieses Elektron erhält dadurch einen Schubs (Kraftstoss). Der Energieübertrag wird

$$\Delta E = \frac{2z^2 e^4}{m\beta^2} \times \frac{1}{b^2} \quad (2.58)$$

(Das Elektron kriegt nur kleine, nichtrelativistische Geschwindigkeiten). ΔE hängt offenbar nur von der Geschwindigkeit (insbesondere $1/\beta^2$) ab, nicht aber von der Masse oder Energie (solange $M \gg m$)!

Um den mittleren Energieverlust zu bekommen, muss man nun über b und alle Elektronen des Materials integrieren. Dies divergiert offensichtlich für $b \rightarrow 0$. Die Grenzen von b müssen sinnvoll angenommen werden:

Etwas hemdsärmelige Argumente sind:

Für b_{max} : Wenn der Energieübertrag in den Bereich der Ionisationsenergie kommt, wirds komplizierter: Man setzt $b_{max} = 2\beta\gamma/I$ und führt einen zusätzlichen Term $-\beta^2/2$ als Mittelwert über atomare Übergänge ein.

Für b_{min} : Unschärferelation sagt $b_{min} = 1/\Delta p = 1/(\gamma\beta m)$

Man erhält daraus die Bethe-Bloch Formel (1930):

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi N_e z^2 e^4}{m} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \left(\ln\left(\frac{2m\gamma^2\beta^2}{I}\right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right) \quad (2.59)$$

Der Ausdruck im \ln ist gerade E_{max}/I . Das δ kam später noch dazu, es enthält empirische Korrekturen, und insbesondere Polarisierungseffekte, ($\sim \ln(\beta^2\gamma^2)$) die den hochrelativistischen Anstieg etwa auf $\ln \beta\gamma$ reduzieren.

Skizze: Steilheit weniger als $1/\beta^2$, Minimum bei $\beta\gamma \approx 3.5$ bei ca. 1-2 MeV/g/cm² für die meisten Materialien, ausser Wasserstoff (etwa 4). Genauigkeit der Formel mit Korrekturen ist etwa 1%. Man beachte, dass die Formel einen Mittelwert angibt, um den die tatsächlichen Werte wegen den statistischen Variationen der Ionisation schwanken.

In Gasen wird die gemessene absorbierte Energie bei hohen Geschwindigkeiten etwas kleiner, die Kurve abgeflacht: 'knock on' Elektronen (δ rays) verlassen das Gasvolumen, man spricht auch vom Fermiplateau.

Folie aus [PDG00], Seite 164.

Anwendungen: Man den mittleren Energieverlust genau kennen, da er die Kalibration von Energiemessungen beeinflusst. Andererseits kann man aus gemessene Energieverlust

und Impuls des Teilchens eine Korrelation bilden, und damit die Masse des Teilchens $m = p/\beta\gamma$ bestimmen, falls diese günstig liegt.

Für Elektronen oder Positronen als einfallende Teilchen ändert sich die Formel wegen Pauliprinzip und gleicher Masse. Aber in Praxis ist für Elektronen meist die Bremsstrahlung relevant, sodass das nicht ins Gewicht fällt.

Nach einer bestimmten Distanz wird das Teilchen schliesslich ganz stoppen, diese heisst range. Der Range von Elektronen schwankt stark, derjenige von schweren Teilchen ist ziemlich gut definiert. \Rightarrow medizinische Anwendungen wie Krebstherapie.

Bremsstrahlung

Der Energieverlust eines geladenen Teilchens durch Bremsstrahlung im elektrischen Feld der Atomkerne ist proportional zu seiner Energie:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0} \quad \Rightarrow \quad E = E_0 e^{-x/X_0} \quad (2.60)$$

Die Konstante X_0 heisst die Strahlungslänge, sie beschreibt eine Art mittlere elektrische Feldstärke im Material. Es gilt ungefähr

$$X_0 = \frac{716.4A}{Z(Z+1) \ln \frac{287}{\sqrt{Z}}} \quad [\text{g/cm}^2] \quad (2.61)$$

Die Strahlungslänge von Aluminium beträgt 8.9 cm, diejenige von Blei 0.56 cm. Dies gilt für Elektronen. Für schwerere Teilchen wird die Schauerwahrscheinlichkeit und somit der Energieverlust mit m^2 kleiner.

Die Energie, wo der Energieverlust von Elektronen durch Bremsstrahlung gerade gleich dem Ionisationsenergieverlust der Bethe Bloch Formel wird, heisst die kritische Energie E_c . Für Blei ist $E_c = 9.5$ MeV, für Aluminium 51 MeV. Unter der kritischen Energie dominiert Ionisation, über der kritischen Energie die Bremsstrahlung.

Photonen

Photonen wechselwirken auf drei Arten mit Materie. Bei kleinen Energien dominiert der Photoeffekt und bei etwas höherer Energie die Comptonstreuung an Elektronen des Materials. Ueber 5 MeV bei Kohlenstoff oder über 20 MeV bei Blei beginnt die Paarerzeugung im elektrischen Feld der Atomkerne zu dominieren.

In allen Fällen verschwindet das Photon instantan. Da es sich um einen stochastischen Prozess handelt, gilt eine exponentielle Abhängigkeit der Intensität

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x} \quad (2.62)$$

μ heisst der Absorptionskoeffizient. (Die Energie der Photonen bleibt konstant!).

Die erzeugten Elektronen verhalten sich nun aber wie bisher besprochen. Das führt im Endeffekt dazu, dass für hohe Energien Elektronen und Photonen ein sehr ähnliches Verhalten zeigen: In beiden Fällen gibt es charakteristische Schauer, indem abwechselungsweise Photonen Paarerzeugung machen und Elektronen im selben elektrischen Feld der Atomkerne Bremsstrahlungsphotonen abstrahlen. (siehe Schauerkalorimeter, weiter unten).

Vielfachstreuung

entsteht durch viele kleine Ablenkungen des Projektils durch die elektrischen Felder der Atomkerne. Rutherfordstreuung!

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist etwa gaussförmig. An Daten angepasste heuristische Formel

$$\langle \theta \rangle = \frac{13.6 \text{ MeV} \cdot z}{\beta p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left(1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0}\right) \quad (2.63)$$

Dabei ist X_0 die sogenannte Strahlungslänge, (Materialkonstante, siehe unten bei Kalorimetrie $1/X_0 \sim Z \cdot (Z + 1)/A$). Wasserstoff oder Helium ergeben die kleinste Vielfachstreuung.

Bei $\theta > 2.5 \langle \theta \rangle$ erhält man meist nur noch Einzel- Streuung, die flacher ist, man bekommt also einen grossen Schwanz in der Streuverteilung.

siehe Jackson, Seite 650.

2.3.2 Spurdetektoren

Ein Spurdetektor dient der Aufzeichnung von Teilchenbahnen. Meistens besteht dabei das Ziel, in einem Magnetfeld durch den Bahnradius den Impuls des Teilchens zu messen, oder durch Rückwärtsverfolgung der Spuren mehrerer Teilchen deren gemeinsamen Vertex (Ursprung) zu rekonstruieren.

Um die Messfehler durch Vielfachstreuung und Energieverlust möglichst klein zu halten, braucht man entweder sehr dünne Detektoren (\Rightarrow Silizium p.i.n. dioden), oder leichtes Material (\Rightarrow Gasetektoren), damit Messfehler durch die Vielfachstreuung klein bleiben.

Gasionisationsdetektoren

Bei Gasionisationsdetektoren wird die Ionsation der Gasmoleküle ausgenützt, um ein elektrisches Signal zu erzeugen. Man hat z.B. in Argongas eine minimale Ionisationsenergie von 15.8 eV. Die mittlere absorbierte Energie pro Ionisationsvorgang ist aber

26 eV, da manchmal auch Elektronen aus den unteren Schalen ionisiert werden. Die mittlere Ionisationsenergie ist für die meisten Gase ähnlich.

Bei Normaldruck gibt es fuer Ar im Mittel ca 30 primäre Ionisationen pro cm für ein Teilchen im Minimum der Bethe-Bloch Formel. Jede Ionisation erzeugt im Mittel 2.4 Elektronen (Sekundaereffekte) = clusters, sodass man total auf ca. 72 messbare Elektronen pro cm kommt.

Diese relativ kleinen Zahlen unterliegen der Poissonstatistik. Deren Verteilung führt zu einer Energiehöhenchwankung, die mit einer Landauverteilung approximiert werden kann.

Höhere Edelgase (Krypton, Xenon, Radon) erzeugen eine höhere Anzahl cluster (etwa Faktor zwei höher für jedes Edelgas wegen höherer Elektronendichte). Man kann auch höhere Drücke verwenden.

Problem: Moderne Detektoren enthalten sehr viele solche Messkanäle (10^4 bis 10^6) so dass man keine allzu aufwendige Elektronik einsetzen kann. Ausserdem ist eine sehr gute Zeitaufösung gefragt, um die Signale mit den richtigen Teilchenpaketen des Beschleunigers zu identifizieren (typisch 5 bis 40 MHz).

Deshalb arbeitet man mit der sogenannten Gasverstärkung: Beispiel: zylindrisches Proportionalrohr (Skizze, Folie mit Tropfen).

Lawineneffekt beim Draht, Arbeitsbereiche der HV (Folie). eigentlich E/p

MWPC: Folie: viele Drähte, Auflösung = Drahtabstand

Driftkammern: Skizze. Auflösung = Zeitaufösung = $100 \mu\text{m}$.

magnetisches Spektrometer: Impuls-Auflösung gegen Impuls. Bei kleinen Impulsen dominiert die Vielfachstreuung, bei grossen die geometrische Auflösung der Detektoren.

Siliziumdetektoren

Prinzip p.i.n. Diode in Sperrrichtung. Verarmungszone=Isolation.

mitlere Energie für Erzeugung eines Elektronlochpaares ist 3.6 eV in Si. (ca. 1/7 von Argongas!), also viel bessere Statistik.

Streifendetektoren für Positionsmessung: typische Dicke 0.3 mm, ergibt ca. 100 keV Energieverlust oder 30'000 Elektron - Lochpaare. gutes Signal, einfacher, schneller Verstärker möglich. Pitch typisch $20 \mu\text{m}$, also bessere Auflösung als bei Gasdetektoren.

Bild H1 Vertexdetektor

Auch Pixels.

Aber nur in kleinen Flächen möglich, vor allem weil es sehr viele Verstärker und Auslesekanäle braucht.

Auch Energiemessung: Mache Si so dick, dass Teilchen stoppt. z.B. 15 mm, Stoppt Betastrahlung und Gammastrahlung aus Kernen. Beste Energieauflösung.

2.3.3 Kalorimeter

siehe auch [Leo94], Kap. 2.4.2

Kalorimetrie bedeutet die Messung der totalen Energie (eigentlich Wärme). In der Kern- und Teilchenphysik versteht man unter einem Kalorimeter ein Gerät, indem ein Teilchen zum Beispiel durch Schauerbildung bei hohen Energien oder durch Ionisation vollständig absorbiert wird. Man misst die total erzeugte Ionisationsladung, oder das entstehende *Sizintillationslicht*, die proportional zu der gesamten Energie des einfallenden Teilchens sind.

elektromagnetische Schauer - Kalorimeter

Wie kann man einen Schauer quantitativ beschreiben? Die Zahl der Teilchen verdoppelt sich vorerst ungefähr nach jeder Strahlungslänge, um nach einem Maximum wieder abzunehmen. Die Länge des Schauers bis zu seinem Maximum beträgt etwa

$$t_{\max} = \ln \frac{E_c}{E_0} \quad (2.64)$$

wo t_{\max} in Einheiten von X_0 gemessen wird. Siehe [PDG00], Figur 23.14.

Man muss also für grosse Energien auch dickere Kalorimeter bauen, aber zum Glück nur mit $\ln E$!

Genauere Untersuchungen zeigen, dass die totale Zahl der erzeugten Teilchen aber ziemlich gut proportional zur einfallenden Energie ist. Das Prinzip eines Schauerkalorimeter besteht also darin, die totale Zahl der erzeugten Teilchen zu Zählen, diese ist dann proportional der Energie. Die Eichung spielt eine zentrale Rolle.

Das transversale Profil des Schauers wird durch die Vielfachstreuung der einzelnen Schauerteilchen bestimmt. Die totale Breite wird etwa

$$R_M = 21 \text{MeV} \frac{X_0}{E_c} \quad (2.65)$$

also praktisch unabhängig von der einfallenden Energie. R_M heisst der Moliere Radius, er beträgt für Blei 1.2 cm. Ca. 90% der Energie sind im Zylinder mit Radius R_M enthalten.

Messgenauigkeit:

$$\left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{E}}\right)^2 + \left(\frac{b}{E}\right)^2 + c^2 \quad (2.66)$$

wobei der erste Term die statistische Schwankung der Zahl der Schauerteilchen beschreibt, a ist eine feste Grösse für ein bestimmtes Kalorimeter. b hängt vom elektronischen Rauschen der Ausleseelektronik und anderen technische beeinflussbaren Werten ab. c schliesslich hängt von der Kalibration und von geometrischen Korrekturfaktoren ab (zum Beispiel Verlust durch endliche Grösse des Kalorimeters). c qualifiziert also die Arbeit der Experimentatoren!

Man baut in der Regel *Samplingkalorimeter*, bei denen ein Material mit grossen Z (z.B. Blei oder Uran) abwechselt mit einem Material, bei dem die Schauer-Teilchen leicht gemessen werden können (Plastik-Szintillatoren, flüssiges Argon, für kompakte Kalorimeter auch Silizium).

hadronische Kalorimeter

Schwere Teilchen haben eine viel höhere E_c , zum Beispiel für Muonen liegt sie über 100 GeV ($\propto m^2$). Elektr. magn. Kalorimeter funktionieren demnach nicht mehr (oder höchstens bei sehr grossen Energien). Für Muonen vernünftiger Energien gibt es deshalb keine Kalorimetrie.

Für Hadronen kann jedoch noch die starke Wechselwirkung ausgenutzt werden. Der totale hadronische Wirkungsquerschnitt variiert für grosse Energien ziemlich schwach (siehe unter Wirkungsquerschnitte). Es gilt deshalb ebenfalls ein exponentielles Absorptionsgesetz für einzelne Teilchen:

$$N = N_0 e^{-x/\lambda} \quad (2.67)$$

Dabei heisst λ die *Nukleare Wechselwirkungslänge*. Sie hängt von den Anzahl der Nukleonen im Material ab und vom totalen Wirkungsquerschnitt. Typische Werte sind 10.3 cm für Blei und 26.1 cm für Aluminium.

Die Unterschiede zwischen den Materialien sind kleiner als bei X_0 , aber die Werte sind erheblich grösser. Hadronische Kalorimeter werden deshalb wesentlich dicker, man baut sie meist als sampling Kalorimeter aus Stahl und Szintillator.

Da die hadronischen Schauer auch elektromagnetische Anteile (z.B. $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) ist die Kalibration ziemlich schwierig. man erreicht mit vielen Tricks typisch $50\%/\sqrt{E[\text{GeV}]}$.

2.3.4 Konzepte grosser Teilchenphysikexperimente

Die grossen Experimente bestehen in der Regel aus fünf separaten Detektorkomponenten (von innen nach aussen):

1. Vertexdetektor (meist Silizium)
2. Spurkammern (Gasdetektoren oder Silizium oder szintillierende Fibern)
3. elektromagnetisches Kalorimeter
4. hadronisches Kalorimeter
5. Muonfilter / Muonspurkammern

Beispiel H1.

Die unterschiedlichen Signaturen in den Kalorimetern und dem Muonsystem lassen eine Teilchenunterscheidung für Elektronen, Muonen oder Hadronen zu.

Will man verschiedene Hadronen (K , π , p) unterscheiden, braucht man zusätzlich Teilchenidentifikationsdetektoren (Cerenkovstrahlung, Flugzeitmessungen oder Energieverlustmessungen).

Skizze: $\Delta E/E$ gegen E : Bei kleinen Energien verwendet man besser ein magnetisches Spektrometer, bei grossen Kalorimeter.

Kapitel 3

Wechselwirkungen

9.1.02

Dieses Kapitel behandelt einige ausgewählte Beispiele von Reaktionen, die zeigen sollen, wie sich die verschiedenen Wechselwirkungen verhalten, und wie diese Experimente zum Verständnis des heutigen Standardmodells beigetragen haben.

3.1 Elektromagnetische WW

Elektromagnetische Wechselwirkungen kann zwischen geladenen Leptonen oder Quarks erfolgen. Diese Messungen haben eine lange Geschichte, die mit dem e^+e^- Collider LEP einen vorläufigen Abschluss gefunden hat. Die Resultate zeigen eine unglaubliche Genauigkeit mit der diese Wechselwirkung durch die Quantenfeldtheorie beschrieben werden kann.

Beispiel eines Wirkungsquerschnittes: Die Muon- oder Tau - Paar - Erzeugung im s-Kanal:

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2\theta) \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (3.1)$$

(siehe Folie von ALEPH mit σ gegen E , für $\mu\mu$, $\gamma\gamma$ und Hadronen) Für Quarkpaar - Erzeugung ist die Sache etwas komplizierter. Für $\sqrt{s} < 2m_c \approx 3.8\text{GeV}$ kann man u, d und s Quarkpaare erzeugen. u hat $2/3$ Ladung, aber drei Farben, es gibt davon also $4/9$ mal $3 = 4/3$ mal soviel wie Muonen. Bei d und s gibt es je $1/9$ mal $3 = 1/3$, total also gerade doppelt so viel wie Muonen. Bezeichnung und Quarkmodellvorausage:

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad R = 3 \sum e_i^2 \quad (3.2)$$

wobei e_i die Quarkladung in Bruchteilen der Elementarladung ist. (Darstellung der Messdaten siehe [Lohr92], Seite 141, oder [PDG00], Seite 229, [Povh95], Seite 115)

Bei 3.8 GeV setzen die c Quarks ein, wir erwarten also zusätzliche $4/3$, also $3 \frac{1}{3}$. Bei 10 GeV schliesslich setzen die b Quarks ein und wir erhalten nochmals $1/3$ dazu, also $3 \frac{2}{3}$.

In der Nähe der Resonanzen der Quarkoniumzustände, bzw. des Z_0 gibt es natürlich andere Verhältnisse.

Die Winkelabhängigkeit kann man sich leicht veranschaulichen, wenn man die *Helizitätserhaltung* bei hohen Energien berücksichtigt. Sie besagt, dass ein Fermion, das ein Wechselwirkungsquant abstrahlt, seine Helizität nicht ändert. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass bei Paarerzeugung und -Vernichtung jeweils Paare verschiedener Helizität erzeugt, bzw. vernichtet werden. Sie gilt für alle Wechselwirkungen, falls die Teilchen hochrelativistisch sind. Im Falle unserer s-Kanal Streuung gibt es 4 Helizitätskombinationen: $e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-$, $e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-$, $e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-$, $e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-$. Der erste und der letzte Fall streuen vorwärts, die mittleren beiden Fälle streuen rückwärts. Nimmt man den Mittelwert ("Spin average", eine nicht triviale Rechenoperation für die Theoretiker) über alle Fälle erhält man zwar eine Vorwärts- Rückwärtssymmetrie, aber in der Mitte ($\theta = \pi/2$) gibt es weniger.

Die Daten zeigen in der Tat eine solche Winkelverteilung, allerdings misst man eine leichte Vorwärts - Rückwärtsasymmetrie, die von dem Einfluss der schwachen Wechselwirkung (Z_0 Resonanz) herkommt. Das war historisch gesehen ein wichtiger Hinweis auf die Existenz des Z_0 .

Hat man im Ausgangskanal wieder Elektronen, wird der Fall komplizierter, da man nun s-Kanal und t-Kanal Streuung gleichzeitig hat. Dieser Fall wird als *Bhabba - Streuung* bezeichnet. Es gibt ausserdem noch Interferenz zwischen den beiden Grafen. Man erhält ([Gott86], Seite 238, [Halz84], Seite 129):

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} \left(2 \frac{1 + \cos^4 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} + (1 + \cos^2 \theta) - 4 \frac{\cos^4 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right) \quad (3.3)$$

Dabei gibt der erste Term den t-Kanal, der zweite den s-Kanal und der dritte den Interferenzterm. Wegen dem t-Kanal Anteil ist in diesem Fall die Streuung sehr viel stärker in Vorwärts - Richtung. (Zusammenfassung der Daten siehe [Gott86], Seite 239.).

3.2 schwache Wechselwirkung I

3.2.1 Der β Zerfall

Die stabilen Atomkerne liegen alle auf einem sehr schmalen Band in der Z-N Ebene. Dabei ist ein zunehmend höherer Neutronüberschuss notwendig je höher Z ist, um die elektrische Coulombabstossung mit Hilfe der anziehenden starken Wechselwirkung zu kompensieren.

Betrachten wir ein festes, ungerades $A=Z+N$ (Isobare), dann sind verschiedene Kerne möglich, sie liegen in erster Näherung auf der 'Massenparabel', der Kern im Minimum

ist der stabilste (höchste Bindungsenergie, also kleinste Masse). Diese Parabeln und überhaupt die Bindungsenergie werden phänomenologisch durch die Weizsäcker Massenformel parametrisiert (siehe später in der Kernphysik).

Energetisch wäre es nun also möglich, dass Kerne sich auf der Massenparabel nach unten bewegen. Für gerade A liegen die uu Kerne auf einer etwas erhöhten Parabel gegenüber den gg Kernen. uu Kerne sind bei grösserem A immer instabil. Prominente Ausnahme ^{14}N . Skizze für $A=106$ in [Povh95], Seite 29.

Für diese Übergänge ist die Umwandlung von Neutronen in Protonen oder umgekehrt notwendig. Im Quarkmodell bedeutet dies eine Änderung der Quarkflavours eines Quarks $u \rightarrow d$ oder umgekehrt. Im Standardmodell ist das nur mit Hilfe der schwachen Wechselwirkung möglich: $u \rightarrow d + W^+ \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ (Skizze). Diese isobaren Kernübergänge heissen β -Zerfälle.

Es gibt grundsätzlich drei Fälle:

- β^- : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Z wird grösser
- β^+ : $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$. Z wird kleiner.
- Electron capture aus der K-Schale (EC): $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ (das ergibt dann eine charakteristische Röntgenstrahlung von der nachfolgenden Kaskade). Z wird kleiner.

EC steht in Konkurrenz zu β^+ , EC braucht aber weniger Energie um $2m_e$, und ist deshalb dominant bei kleinen Energiedifferenzen.

Energieverteilung nach dem Zerfall:

Bei EC alles ist alles klar: Zweiteilchenzustand. Die beiden Impulse müssen entgegengesetzt gleich sein, daraus folgt eine feste Energie für die Neutrinos und den Rückstosskern (letztere viel kleiner).

Bei β^+ und β^- gibt es einen Dreikörperendzustand. Da sind aus Energie- und Impulserhaltung noch nicht alles bestimmt.

Da spielt der Phasenraumfaktor eine Rolle. Nach Fermis goldener Regel gilt für die Wahrscheinlichkeit W eines Prozesses (sei es nun Zerfall oder Streuung)

$$W \sim |m_{if}|^2 \rho(E) \quad (3.4)$$

wo ρ die Dichte der Endzustände bedeutet. Diese Zustandsdichte gibt die Zahl der möglichen quantisierten Endzustände im 6 dimensionalen Orts- und Impulsraum (pro Endzustandsteilchen) an. (Rechnerei kompliziert, hier nur Resultate fuer 2 und 3 Koerperendzustand).

Im Fall eines Zweikörperendzustand wird

$$\rho \sim \frac{|p|}{M^2} \quad (3.5)$$

wobei M die Gesamtenergie (also die Ruhemasse des Ursprungszustandes) und $|p|$ der Impuls eines der Teilchen im c.o.m. ist. Anschaulich: Je grösser die zur Verfügung stehende Energie desto grösser die Übergangswahrscheinlichkeit.

Dreikörperendzustand: Wegen Kinematik müssen alle drei Impulse in der gleichen Ebene liegen. Man definiert die invariante Masse zweier Teilchen $m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2$ und $m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2$. Man trägt m_{12}^2 gegen m_{23}^2 auf: Dalitzplot. Eine längere Rechnung zeigt, dass die Phasenraumdichte innerhalb der Energieerhaltungsmässigen Limiten in dieser Fläche konstant ist. Beobachtet man eine Struktur, so muss diese auf das Matrixelement zurückzuführen sein. Diese Methode wird besonders auch in der Mesonspektroskopie angewendet.

Falls die Impulse $p_1 || p_2$ wird $m_{12} = m_1 + m_2$ minimal und p_3 maximal. (linker Rand) des Dalitzplots. Der untere Rand ergibt maximales p_1 und der diagonale Rand maximales p_2 .

In unseren β -Zerfällen ist nun eine Masse (der Rückstosskern) sehr gross. Von Interesse ist die Elektronenergie, das ist was man beobachtet. Sie wird offensichtlich maximal, wenn Neutrino und Kern beide dazu entgegengesetzt fliegen. Eine längere Rechnung ergibt

$$\frac{dN}{dp_e} \propto G_F^2 \cdot F(Z, E_e) \cdot p_e^2 (E_0 - E_e)^2 \sqrt{1 - \frac{m_\nu^2}{E_\nu^2}} \quad (3.6)$$

(E_0 ist die gesamte freiwerdende Energie = maximale Energie des Elektrons). Das ist die Formel für das β *Spektrum*. Es geht also an beiden Enden parabolisch. Die Form kommt rein durch den Phasenraumfaktor zustande. Dieser spektrale Teil der Uebergangsrate ist genau berechenbar. Die Gesamtrate hängt aber auch noch von den Kernwellenfunktionen ab, für die es keine sehr genauen Modelle gibt (stecken also in der obigen Formel im \propto).

Die *Fermifunktion* $F(Z, E_e)$, berücksichtigt die elektrische WW zwischen dem Kern und dem Elektron. Deshalb ist β^+ und β^- leicht verschieden. (Siehe [Povh95], Seite 263.)

Das Matrix element der WW, also der Propagator und die Kopplungskonstanten werden wegen der grossen W Masse klein:

$$G_F = \frac{\alpha_W}{M_W^2} \quad (3.7)$$

\mathcal{M}_{if}^2 in der Übergangswahrscheinlichkeit geht also mit m_W^4 und das ist der Grund, warum die schwache WW so schwach ist. $G_F = 1.17 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ heisst die *Fermi-konstante* und wurde mit Hilfe vieler Betazerfaellen sehr genau bestimmt (Messfehler 10^{-5}).

Integriert man den Phasenraumfaktor und die Fermifunktion über dp_e erhält man eine neue Funktion $f(Z, E_0)$, die proportional zu E_0^5 ist (Sargent – Regel), sie enthält die genau berechenbaren Anteile der Übergangswahrscheinlichkeit. Damit werden die gemessenen Halbwertszeiten $t_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau$ multipliziert, was zu den sogenannten *ft - Werten* führt, und die die übrigen Abhängigkeiten des β – Zerfalles, nämlich Spin und Bahndrehimpuls sowie Kernwellenfunktionen beschreiben. Die ft-Werte variieren von ca 10^3 bis 10^{22} sec, also eine unglaublich grosse Variation.

Wenn der Spin des sich umwandelnden Quark nicht ändert, und der Gesamtdrehimpuls des Kerns erhalten bleibt, spricht man von *Fermiübergängen*. In diesem Fall müssen Elektron und Neutrino Spin antiparallel sein. Man spricht auch von Vektorübergang. Die Winkelverteilung der Zerfallelektronen ist kugelsymmetrisch.

Kehrt sich die Spinrichtung des Quarks um, heisst der Zerfall *Gamow-Teller Übergang*. Der Gesamtspin des Kerns kann sich um eins ändern, er muss sich um eins ändern, wenn der Anfangsspin 0 ist. Die Spins des Elektrons und des Neutrinos sind parallel, man spricht vom Axialvektorübergang. Die Winkelverteilung ist anisotrop, die Zahl der Elektronen in Richtung des ursprünglichen Spins ist kleiner als umgekehrt.

Im weiteren spielt der Bahndrehimpuls l von Elektron und Neutrino eine Rolle, wobei Übergänge mit hohem Bahndrehimpuls wegen den viel kleineren Überlapp der Anfangs- und Endzustandwellenfunktionen etwa um einen Faktor 10^3 bis 10^4 pro Einheit in l unterdrückt werden. Man spricht von l - fach verbotenen Übergängen. Die Parität der Kernwellenfunktion ändert sich um $(-1)^l$.

Zum Beispiel ist ^{115}In ($J = 9/2^+$) nach ^{115}Sn ($J = 1/2^+$) nur mit $l = 4$ möglich, es handelt sich um einen 4-fach verbotenen Übergang, die Halbwertszeit beträgt 6×10^{14} Jahre, $\log ft = 22.7$.

Der klassischste β Zerfall ist natürlich der Neutronzerfall. Es bestehen beide Möglichkeiten, sowohl V wie auch A Übergänge. Aus der Anisotropie der Winkelverteilung bezüglich des Neutronspins kann man das Verhältnis von V und A bestimmen.

β - Zerfälle komplizierterer Kerne haben im allgemeinen eine Mischung der beiden Anteile.

Im bereits erwähnten Experiment von Wu et al. handelt es sich um einen reinen Gamow-Teller Übergang: Hier wurden ^{60}Co Kerne mit $J=5$ verwendet, die nach ^{60}Ni mit $J=4$ zerfallen. Es muss sich also um einen reinen Gamow-Teller Übergang handeln, eine Paritätsverletzung konnte demnach nachgewiesen werden.

Im Gegensatz dazu ist der Zerfall des ^{14}O ($J = 0^+$) in ^{14}N ($J = 0^+$) ein reiner Fermi-Zerfall: Die Parität ändert sich nicht, also $l = 0$. Und Wegen $0 \rightarrow 0$ ist der Gamow-Teller verboten. In diesem Fall sind ausserdem die Quantenzahlen im Kernschalenmodell für das ursprüngliche und neue Nukleon identisch (nämlich $1p_{1/2}$), damit ist der Überlapp der Ortswellenfunktionen praktisch vollständig, man spricht in diesem Fall von einem *supererlaubten* Übergang.

Zusammenfassung der Auswahlregeln:

supererlaubt: Kernwellenfunktionen identisch

erlaubt: $l = 0, \Delta P = 0, \Delta J = 0$: Fermi

erlaubt: $l = 0, \Delta P = 0, \Delta J = 0, \pm 1$, nicht $0 \rightarrow 0$: Gamow-Teller

l - fach verboten: $l, \Delta P = (-1)^l$

Das quantitativ wichtigste natürlich vorhandene β aktive Nuklid ist ^{40}K ($J = 4^-$). Es zerfällt sowohl mit β^+ oder EC in ^{40}Ar als auch durch β^- in ^{40}Ca , beide ($J = 0^+$). Es handelt sich also um einen dreifach verbotener Übergang, die Halbwertszeit beträgt 1.27×10^9 Jahre.

Altersbestimmung: Messung der Kalium-40-konzentration (n-Aktivierung) und der Argon-40-konzentration (Massenspektrometer) heute. Annahmen: Kalium-40 wurde bei der Gesteinsbildung eingebaut und alles Argon-40 entstand im Laufe des Alters des Gesteins aus dem Kalium-40 Zerfall. Aus dem Verhältnis von Argon-40 und Kalium-40 kann direkt das Alter bestimmt werden. Messbereich 10^6 bis 4.9×10^9 Jahre (Alter des Sonnensystems).

Ebenso $^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^+ + \nu_e$: $t_{1/2} = (5730 \pm 40)$ Jahre: Das C-14 entsteht durch kosmische Strahlung in der Atmosphäre aus N-14 + n. Zusammen mit dem Zerfall stellt sich ein Gleichgewicht von C-14 / C-12 von etwa 10^{-12} ein, das in die Organismen im Laufe ihres Lebens eingebaut wird. Nach dem Absterben zerfällt das C-14. Man misst das Verhältnis C-14 / C-12 im abgestorbenen Material und bestimmt daraus die Lebensdauer. Messbereich: einige hundert bis 50'000 Jahre.

Beispiele von Quellen und Spektren fuer Messzwecke: siehe Tabelle in [PDG00]. Die mittlere Energie der Elektronen ist ungefähr $1/3 \cdot E_0$.

Neutrino Masse aus dem Tritiumexperiment/Kurieplot. Bilder: Holzschuh Experiment

3.2.2 Der direkte Nachweis der W Bosonen

Möchte man die W Bosonen als reelle Teilchen beobachten, muss man mindestens die Energie deren Masse (80 GeV) aufbringen. Dieses wurde ertmals mit dem $p\bar{p}$ Collider SppS am CERN 1983 möglich, dieser Beschleuniger wurde extra fuer diesen Zweck gebaut (genauer der bestehende p Beschleuniger in ein Collider umgewandelt). Beide Strahlen werden gegenläufig durch den gleichen Ring geschickt, da sie identische Masse und umgekehrtes Vorzeichen haben. $E = 300$ GeV.

Bei der $p\bar{p}$ Kollision kann $u + \bar{d} \rightarrow W^+$ oder $\bar{u} + d \rightarrow W^-$ passieren. Die W zerfallen dann in $e\nu$, $\mu\nu$ oder $\tau\nu$ mit jeweils etwa gleicher Wahrscheinlichkeit (Leptonuniversalität)

Beachte dass der W Spin 1 ist, die Positronen können also gleichzeitig rechtshändig und die Neutrinos linkshändig sein (Skizze), wie das die schwache WW fordert (Paritätsverletzung).

Neben der Leptonpaare sollte es auch - gleich wahrscheinlich - die Zerfälle in passende Quark-Antiquarkpaare geben. Dabei stehen in erster Linie die Paare der gleichen Generation zur Auswahl: $u\bar{d}$ und $c\bar{s}$. Die dritte Generation $t\bar{b}$ kommt nicht in Frage, da die top Masse etwa doppelt so hoch ist wie die W Masse. Die Quarkpaare kommen in drei Farben vor. Diese naive Überlegung führt dazu, dass die Produktion $e\nu:\mu\nu:\tau\nu:u\bar{d}:c\bar{s} = 1:1:1:3:3$. In der Tat misst man für die Leptonpaare jeweils Werte zwischen 10 und 11%, die gegenwärtigen Messfehler sind etwa 0.5%.

3.2.3 Neutrino - Kernstreuung und CC bei HERA

Man kann den Grafen des Betazerfalles auch auf verschiedene Weise umdrehen. Schon früh wurden Muon-Neutrinos auf Kerne geschossen und versucht das entsprechende Lepton zu beobachten.

Den Wirkungsquerschnitt für die Neutrino Quarkstreuung (t-Kanal!) erhalten wir analog zum elektromagnetischen Fall, Formel (2.51). Wir müssen aber $\alpha \rightarrow \alpha_W$ und den Propagatorterm $1/q^2 \rightarrow 1/(q^2 - m_W^2)$ ersetzen. Die Winkelabhängigkeit (im elektrom. Fall $(1 + \cos^4(\theta/2))$) betrachten wir weiter unten.

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} \propto \frac{g_w^2}{(q^2 - m_W^2)^2} \quad (3.8)$$

oder entsprechend (2.50)

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} \propto s \cdot \frac{g_w^2}{(q^2 - m_W^2)^2} \quad (3.9)$$

Für $q^2 \ll m_W^2$ verwschwindet die q^2 Abhängigkeit und man erhält mit der Definition der Fermikonstante (2.47) direkt

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} \propto s \cdot G_F^2 \quad (3.10)$$

Man hoffte ursprünglich, bei immer grösserer Energie schliesslich eine Aenderung der linearen WQ Abhängigkeit beobachten zu können, aber die W Masse war zu gross fuer die Neutrinostreuexperimente. Der WQ stieg und stieg und stieg...

Wir müssen die Einschränkung berücksichtigen, dass Antineutrinos sich in positive Muonen und Neutrinos in negative Muonen verwandeln, Neutrinos (Antineutrinos) also nur an negativ (positiv) geladenen Quarks streuen können. Weiter muss für die schwache Wechselwirkung das Quark (Antiquark) linkshändig (rechtshändig) sein.

Wir betrachten die Streu-Winkelabhängigkeiten im Schwerpunktsystem (siehe Kommentar im Abschnitt 2.1.5 zu Winkelverteilung) für die verschiedenen Kombinationen: ($y := \sin^2(\theta/2)$)

Prozess	Winkelabhängigkeit
$\nu d \rightarrow \mu^- u$	1
$\nu \bar{u} \rightarrow \mu^- \bar{d}$	$(1 - y)^2$
$\bar{\nu} u \rightarrow \mu^+ d$	$(1 - y)^2$
$\bar{\nu} \bar{d} \rightarrow \mu^+ \bar{u}$	1

Die Daten zeigen tatsächlich diesen Unterschied zwischen Neutrino und Antineutrino - Streuung ([Povh95], Seite 141). Aus den Daten kann man auch direkt ablesen, dass es offenbar in der Größenordnung von 10% auch Antiquarks im Proton gibt (virtuelle Paarproduktion aus Gluonen).

Experiment: erzeuge Neutrinos aus $\pi \rightarrow \mu\nu$ -zerfällen und versuche die Muonen, die bei $\nu + A \rightarrow A' + \mu$ zu messen. Brauche gute Abschirmung für die ursprünglichen Muonen: Viele Tonnen Eisen, Kriegsmaterialreserve der Schweizer Armee eignete sich sehr fuer solche Experimente am CERN. Aktuelles Experiment: NuTeV vom FERMILAB.

Am HERA ep collider kann man die andere Umkehrung $e + p \rightarrow X + \nu$ beobachten und daraus zum Beispiel auch $m_W = 81.2 \pm 3.3 \pm 4.3$ GeV. bestimmen.

3.2.4 W^+W^- – Produktion bei LEP

Neutrinoaustausch und TGC Graphen: γWW und $Z_0 WW$.

Drei Endzustands typen: leptonisch $l\nu\bar{l}\bar{\nu}$, semileptonisch $l\nu\bar{l}q\bar{q}$, hadronisch $q\bar{q}q\bar{q}$

neue Resultate: W Produktion bei LEP.

2 Auswertemethoden für Massebestimmung:

a) Wirkungsquerschnitt gegen Strahlenergie. Genauigkeit hängt von Strahlenergieeichung ab (Bilder vom Energieeinflüssen bei LEP).

b) Invariante Masse der Zerfallsprodukte.

Resultate von Sommerkonferenz 2000: $m_W = 80.434 \pm 0.037$ GeV

3.2.5 Der Zerfall geladener Pionen

Unterdrückung von $\pi \rightarrow e\nu$ durch einen Faktor $(1 - m_e^2/m_\pi^2)^2$: Der Spin des Pions ist null, deshalb müssen die beiden Zerfallsteilchen gleiche Helizität haben. Das Muon oder Elektron wird dabei in eine "falsche" Helizität gezwungen, was nur bei kleinen Geschwindigkeiten möglich ist, in der Tat ist der Unterdrückungsfaktor etwa $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, [Mart92] page 238, [Halz84], page 266/267.

3.3 Starke Wechselwirkung

3.3.1 Gluonen und Quarks

[Mart92] page 157 bis 171.

$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$: Zweijet ereignisse

$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$: Dreijet ereignisse

Running α_s , [PDG00], Messungen von $\alpha_s(Q^2)$

Kapitel 4

Tiefinelastische Streuung

10.01.01

Die folgende Einführung in die Methoden der HERA – Physik geht erheblich tiefer als die bisher behandelten Themenbereiche. Sie soll als Beispiel dienen, wie aktuelle Forschung funktioniert. Die Physik bei HERA gibt uns aber auch Gelegenheit, die Berechnung von Wirkungsquerschnitten in allen drei Wechselwirkungen konkret zu vertiefen (siehe Abschnitt 4.3.).

4.1 Strukturuntersuchung an komplexen Objekten

Wollen wir die starke Wechselwirkung experimentell untersuchen, sehen wir uns unmittelbar mit dem Problem konfrontiert, dass – im Gegensatz zu den Objekten der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung – die entsprechenden feldtheoretischen Objekte *Quarks* und *Gluonen* in der Natur gar nicht frei vorkommen. Das in der Einleitung bereits erwähnte über alle Grenzen steigende Wechselwirkungspotential erzeugt aus dem Vakuum so lange Quark- Antiquarkpaare, bis ein farbneutrales Objekt, ein *Hadron*, entstanden ist. Dieser Effekt heisst *confinement* und als Hadronen kommen Mesonen ($q\bar{q}$) und Baryonen (qqq) in Frage.

Die klassische Methode des Kern- und Teilchenphysikers besteht dann darin, ein Projektil (zum Beispiel Elektron, Myon oder Neutrino) mit Impuls k mit bekannten Eigenschaften und Wechselwirkungen in das zu untersuchende Objekt, zum Beispiel ein Proton, zu schießen. Analysiert werden die Eigenschaften des gestreuten Projektils, insbesondere der Streuwinkel θ und der Impuls des gestreuten Projektils k' . Man vergleicht den gemessenen Wirkungsquerschnitt mit dem eines punktförmigen Objektes, den Unterschied nennt man den *Formfaktor* F :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{\text{point}} \cdot F(q^2) \quad (4.1)$$

Dabei ist $q = k' - k$ der 4er Vektor des Impulsübertrages. Es wird insbesondere

$$q^2 = (k - k')^2 = -4|k| \cdot |k'| \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.2)$$

4.1.1 Elastische Streuung

[Halz84], Kap 8.

Bleibt das Proton im Endzustand intakt, spricht man von elastischer Streuung. Dann ist im Schwerpunktsystem $|k| = |k'|$. Dies ist auch fast das Ruhesystem des Objektes, falls dieses schwer genug ist. Statt θ verwendet man oft die lorenzinvariante Grösse $Q^2 := -q^2$ als charakteristische Zahl für den einzelnen Streuprozess. θ und Q^2 sind über Formel (4.2) miteinander verknüpft.

Der Formfaktor wird für ein statisches Objekt gerade die Fouriertransformation der Ladungsverteilung:

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} d^3x, \quad (4.3)$$

wobei für den sphärisch symmetrischen Fall $\rho = \rho(r)$ oft die Entwicklung

$$F(\vec{q}) = 1 - \frac{1}{6}|q|^2 \langle r^2 \rangle + \dots \quad (4.4)$$

verwendet wird. Damit kann man offensichtlich die Ausdehnung einer statischen Ladungsverteilung dadurch bestimmen, dass man den Wirkungsquerschnitt und damit den Formfaktor für verschiedene \vec{q} misst.

Es folgt eine Zusammenstellung der Streuformeln an Punktladungen für verschiedene Fälle, wobei wir nur t-Kanal Streuung berücksichtigen, da wir annehmen, dass das Projektil und das untersuchte Objekt verschieden sind (also keine ee Streuung):

$$\text{kein Spin: Rutherford} \quad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} \right)_{\text{R}} = \frac{(2\alpha)^2 E^2}{q^4}, \quad (4.5)$$

$$\text{Elektron mit Spin: Mott} \quad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{(2\alpha)^2 E^2}{q^4} (1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}), \quad (4.6)$$

jeweils mit dem typischen Propagatorterm des Photons $1/q^2$ und der elektromagnetischen Kopplungskonstante α . Es bedeuten E die Energie des einfallenden Elektrons und $\beta = k/E$ dessen Geschwindigkeit. Man sieht, dass bei kleinen β der Spin des Elektrons keine Rolle spielt. Das ist plausibel, weil wir bisher nur elektrische Wechselwirkung haben, der Spin aber magnetisch wechselwirkt. Bei hohen Geschwindigkeiten sieht das Elektron ein von der elektrischen Ladung des Objektes erzeugtes Magnetfeld. Im hochrelativistischen Fall ($\beta = 1$) wird der Klammerausdruck zu $\cos^2 \theta/2$. Dies ist ebenfalls

plausibel, denn es entspricht der Regel, dass die Helizität für hochrelativistische Streuung erhalten bleibt (gilt für alle Vektor- und Axialvektorkopplungen).

2 hochrelativistische, unterscheidbare Fermionen mit Spin: (z.B. $e\mu \rightarrow e\mu$). Durch Vernachlässigung der Massen wird in diesem Fall das Schwerpunktsystem sehr einfach. Es sind die einfallenden (ausfallenden) Impulse des Elektrons k (k') und des Myons p (p') alle vom gleichen Betrag $|k| = E$. Im Schwerpunktsystem wird die Streuformel dabei in lorenzinvarianter Form zu

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{e\mu} = \frac{\alpha^2 s s^2 + u^2}{2q^4 s^2}, \quad (4.7)$$

wobei die Spinsumme und der Flussfaktor in den Mandelstamvariablen ausgedrückt sind, die, zur Erinnerung, wie folgt definiert sind:

$$s = (k + p)^2 \approx 2k \cdot p \approx 4E^2 \quad (4.8)$$

$$t = (k - k')^2 \approx -2k \cdot k' \approx -2p \cdot p' \quad (4.9)$$

$$u = (k - p')^2 \approx -2k \cdot p' \approx -2k' \cdot p \quad (4.10)$$

somit $t = q^2$. Den Term in der Klammer in (4.7) kann man auch durch den Streuwinkel ausdrücken: Es ist $u = -2k' \cdot p = -s \cos^2(\theta/2)$ und somit

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{e\mu} = \frac{2\alpha^2 E^2}{q^4} \left(1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}\right) \quad (4.11)$$

Die beiden Terme in der Klammer haben eine einfache Interpretation: Für den Fall, in dem die Helizitäten von e und μ gleich sind, ist der totale Spin null. Die Helizitätenregel ist immer erfüllt, die Winkelverteilung im Schwerpunktsystem deshalb isotrop. Sind die Helizitäten verschieden, so müsste bei grossen Streuwinkel ein Spinflip erfolgen, oder die Streuung erfolgt durch einen Drehimpulszustand, der verschieden von null ist. Diese Situation wird durch den \cos^4 Term unterdrückt wird.

Streut man statt an einem Myon an einem Quark, so gilt exakt die gleiche Formel, nur dass man noch einen Faktor e_q^2 multiplizieren muss. Dieser Faktor stammt von der elektrischen Ladung des in Frage kommenden Quarks in Einheiten der Elementarladung, d.h. $e_q^2 = 1/9$ oder $4/9$.

Rechnet man das alles ins Ruhesystem des einen Teilchens mit Masse M um, erhält man ([Halz84], Kapitel 6.8):

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{e\mu} = \frac{(2\alpha)^2 E^2}{q^4} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (4.12)$$

Den ersten Term in der Summe nennt man auch den elektrischen, den zweiten Term den magnetischen Beitrag, weil der zweite Term auf Grund des Spins des Targets zustande kommt (vgl. (4.6), Mottformel). Es gibt keinen offensichtlichen Zusammenhang der beiden Summanden mit den Summanden in der Formel (4.11).

Hat man nun also ein geladenes Target, das ebenfalls einen Spin und ein magnetisches Moment hat, reicht ein Formfaktor alleine nicht mehr aus. Man verwendet für die elektrischen und magnetischen Terme je einen getrennten Formfaktor und erhält für ein Proton

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{ep} = \frac{(2\alpha)^2 E^2}{q^4} \left(G_E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{für} \quad |q|^2 \ll M^2, \quad (4.13)$$

wobei G_E der elektrische und G_M der magnetische Formfaktor genannt wird. Der elektrische Formfaktor ist für die Streuung unter kleinen Winkeln (Vorwärtsstreuung) und der magnetische für Streuung unter grossen Winkeln (Rückwärtsstreuung) zuständig.

Analysiert man die Formfaktoren aus den gemessenen Daten mit Hilfe von Formel (4.4), erhält man in beiden Fällen $\langle r \rangle = 0.8$ fm. Das bedeutet, dass die elektrischen und magnetischen Teile des Protons die gleiche Verteilung haben. Die 0.8 fm werden als der etablierte Radius des Protons betrachtet wird.

Der Vollständigkeit halber folgt die korrekte Formel für alle q im Laborsystem des Protons, was sich für ein endlich schweres Proton vom Schwerpunktsystem unterscheidet (Rosenbluthformel). Es gilt

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{(\alpha)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{E'}{E} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.14)$$

mit der Energie des auslaufenden Elektrons

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{und} \quad \tau := -\frac{q^2}{4M^2} \quad (4.15)$$

Beachte, dass es im elastischen Streufall nur einen freien Parameter gibt, zum Beispiel der Streuwinkel θ oder besser Q^2 . Dann ist alles andere bestimmt, insbesondere E' .

4.1.2 Unelastische Streuung

Mit unelastischer Streuung ist in diesem Falle gemeint, dass das Target sich beim Streuvorgang in mehrere Bruchteile zerlegt. Das setzt natürlich primär voraus, dass es sich überhaupt um ein zusammengesetztes Objekt handelt. Wir wollen vorerst möglichst wenig über die Natur des Zerlegungsvorganges annehmen. Man charakterisiert die Gesamtheit der Bruchstücke des Objektes mit ihrer invarianten Masse W . Es gilt die Energie- und Impulserhaltung

$$k' = k - q \quad W = p + q \quad \Rightarrow \quad W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2p \cdot q + q^2 \quad (4.16)$$

mit den 4er Impulsen k für das einlaufendes Elektron mit vernachlässigter Masse, k' für auslaufende Elektron, p für das einlaufende Proton mit Masse M und q für den 4er Impulsübertrag.

Mit dieser invarianten Masse W haben wir einen weiteren freien Parameter für den Streuprozess. Dieser ist jetzt durch zwei Zahlen festgelegt (Veranschaulichung siehe unten). Es ist natürlich W/geM . Es werden üblicherweise zwei dimensionslose Zahlen x und y definiert:

Als Mass für die Unelastizität wird die dimensionslose Grösse x oder manchmal ω eingeführt mit

$$\omega := \frac{1}{x} := 1 - \frac{W^2 - M^2}{q^2} = -\frac{2q \cdot p}{q^2} \quad (4.17)$$

Da $q^2 < 0$ ist x immer kleiner 1. Die Grösse $q \cdot p$ ist immer positiv, wie man sich zum Beispiel durch Ausrechnen im Ruhesystem der Masse M überzeugen kann: $p \cdot q = M \cdot q_0$. Also ist

$$0 \leq x \leq 1. \quad (4.18)$$

Dabei bedeutet $x = 1$, dass $W^2 = M^2$, also der elastische Grenzfall mit $q^2 = -2p \cdot q$.

Die Definition für y lautet

$$y := \frac{p \cdot q}{p \cdot k}. \quad (4.19)$$

Dies ist ein ähnlicher Ausdruck wie $1/x$, aber normiert (statt auf q^2) auf eine Grösse, die etwa der Schwerpunktenergie $s = (p + k)^2 = M^2 + 2p \cdot k$ entspricht. Setzt man $q = k - k'$ in die Definition ein, erhält man

$$y = 1 - \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} \approx 1 - \frac{|k'|}{|k|} \left(\frac{1 - \cos \Theta}{2} \right) = 1 - \frac{|k'|}{|k|} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4.20)$$

wobei $\Theta = \pi - \theta$ der Winkel ist, den k' und p einschliessen. Die Formel gilt für $p, k \gg M$. Im Targetruhesystem, also $p = (M, 0, 0, 0)$, erhält man

$$y = 1 - \frac{|k'|}{|k|} \quad (4.21)$$

(Beachte, dass bei HERA jeweils Θ statt θ gemessen wird, in allen Formeln muss also $\sin^2(\theta/2)$ mit $\cos^2(\theta/2)$ und vice versa ersetzt werden.)

Wenn man die beiden Definitionen für x und y miteinander multipliziert, erhält man den Zusammenhang:

$$\boxed{x \cdot y = \frac{Q^2}{s - M^2}} \quad (4.22)$$

den es sich lohnt zu merken. Man erkennt, dass nur zwei der für den einzelnen Streuprozess relevanten lorentzinvarianten Parameter x, y, Q^2 voneinander unabhängig sind. 11.01.01

Im elastischen Fall ist $x = 1$ und $y = \sin^2(\theta/2)$ ($\theta =$ Streuwinkel im Schwerpunktsystem). Grosses y bedeutet also Rückwärtsstreuung. Insbesondere kann damit für die Elektron - Quark - Streuung aus Formel (4.11) der folgende lorentzinvariante Ausdruck gewonnen werden, mit

$$dy = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (4.23)$$

$$dQ^2 = s \cdot dy \quad (4.24)$$

wird der Wirkungsquerschnitt in Funktion von y

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2 s}{q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2), \quad (4.25)$$

und in Funktion von Q^2

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial Q^2} \right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \quad (4.26)$$

jeweils für $s \gg M^2$. Beachte, dass es für diesen elastischen Fall nur noch eine unabhängige Variable gibt: y und Q^2 hängen über $Q^2 = ys$ zusammen.

4.1.3 Beispiel

Das folgende hypothetische Beispiel soll das Wesen dieser Formalismen veranschaulichen. Wir nehmen den besonders einfachen Fall an, dass das zu untersuchende Objekt sich gerade in zwei Teile mit 4er Impulsen p_1 und p_2 zerlegt, und zwar so, dass alle 4er Vektoren in einer Ebene liegen sollen. Weiter soll p_1 parallel zu p weiterlaufen, und p_2 wird unter dem Winkel γ gestreut.

Es gilt folgende Energie- und Impulserhaltung:

$$p_1 + p_2 + k' = p + k \quad (4.27)$$

Das sind drei Gleichungen, da eine Raumkomponente trivialerweise null ist. Wir haben aber fünf Unbekannte, nämlich $|p_1|, |p_2|, \gamma, |k'|, \theta$. Es bleiben also tatsächlich wie behauptet zwei unabhängige Freiheitsgrade für den Prozess.

Die invariante Masse der beiden Teile wird dann:

$$W^2 = (p_1 + p_2)^2 = 4 |p_1| |p_2| \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (4.28)$$

wenn man die Massen der beiden Teile vernachlässigt.

Aus Impulserhaltungsgründen sind die transversalen Komponenten von p_2 und k' gleich. Wir suchen uns nun das Inertialsystem, das parallel zur Strahlrichtung der Protonen z laufen soll, und zwar so, dass $\gamma = \theta$. Darin muss demnach $|k'| = |p_2|$ gelten. Deshalb bleibt im Endzustand nur der Impuls p_1 übrig. Wir stellen die Impulsbilanz entlang z auf:

$$|p| - |k| = |p_1| \quad (4.29)$$

Für den übertragenen Impuls q gilt

$$k' = k - q, \quad p_1 + p_2 = p + q \quad (4.30)$$

Wir rechnen das Quadrat des zweiten Ausdruckes in (4.30) aus und vernachlässigen alle Massen:

$$2p_1 \cdot p_2 = 2p \cdot q + q^2 \quad (4.31)$$

$$2|p_1||p_2|(1 - \cos \gamma) = q^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (4.32)$$

$$4|p_1||p_2| \sin^2 \frac{\gamma}{2} = -4|k||k'| \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (4.33)$$

$$|p_1| = -(|p| - |p_1|) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (4.34)$$

$$|p_1| = |p| \cdot (1 - x) \quad (4.35)$$

Das nicht abgelenkte Bruchstück p_1 hat also gerade einen Bruchteil $1 - x$ des ursprünglichen Impulses p des Objektes, der restliche Impulsanteil x hat an der Wechselwirkung teilgenommen. Wir können also in diesem Fall x als den Bruchteil des Impulses interpretieren, der an der Wechselwirkung teilnimmt.

Beachte, dass diese Interpretation an diesem Beispiel möglich ist, ohne dass irgendwelche Annahmen über ein Partonmodell oder gar eine Wechselwirkung im Proton gemacht werden.

4.2 Messung der Streuparameter bei HERA

Grundsätzlich stehen 4 Messgrößen zur Verfügung, um die zwei Parameter der Streuung zu bestimmen. Man bestimmt meist Q^2 und y und berechnet $x = Q^2/ys$ aus (4.22). Die Messgrößen sind: Energie E' und Winkel $\Theta = \pi - \theta$ des gestreuten Elektrons, totale hadronische Energie E_h und mittlerer hadronischer Winkel γ .

Die direkteste Methode, diese Streuparameter aus den experimentellen Werten zu bestimmen, besteht darin, nur die Daten des gestreuten Elektrons zu verwenden. Es wird dann $Q^2 = 2k \cdot k' = 4E_e E' \sin^2(\theta/2)$ und mit Formel (4.20) y bestimmt. Diese Methode heisst im Jargon die Elektronmethode. Sie ist relativ sicher bezüglich systematischer Fehler des schlechter kontrollierbaren Hadronenzustandes, hat aber den Nachteil, dass bei kleinen y ein Messfehler in der Energie E' sich stark auf die Genauigkeit von x auswirkt. Man bekommt folgende partielle Ableitungen ($E' = |k'|$) ([Felt87] mit $\theta = \pi - \Theta$):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial E'}\right)_{\theta=\text{konst.}} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dE'}{E'} \quad (4.36)$$

$$\left(\frac{\partial Q^2}{\partial E'}\right)_{\theta=\text{konst.}} = \frac{dE'}{E'} \quad (4.37)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_{E=\text{konst.}} = -\cot \frac{\theta}{2} \left(x \frac{|p|}{E_e} - 1\right) d\theta \quad (4.38)$$

$$\left(\frac{\partial Q^2}{\partial \theta}\right)_{E=\text{konst.}} = \cot \frac{\theta}{2} d\theta \quad (4.39)$$

$$(4.40)$$

Sowohl für experimentelle Überprüfungen der Energieeichungen als auch für das Studium von Prozessen bei kleinem y ist es sinnvoll, auch den Endzustand der hadronischen Bruchstücke mit einzubeziehen. Hier hat man aber mit verschiedenen Problemen zu kämpfen:

- Der Anteil des Endzustandes in Proton-Strahlrichtung trägt in der Regel relativ viel Impuls weg, der aber hauptsächlich innerhalb des Strahlrohres bleibt, und deshalb nicht messbar ist.
- Die Hadronisierung führt zu vielen Einzelteilchen, die u.U. dicht liegen und nicht einzeln gemessen werden können.
- Die Hadronisierung führt aber oft auch zu ausgedehnten Energieflüssen, wo in einem weiten Bereich des Detektors zum Teil sehr kleine Energien deponiert werden, die nahe dem elektronischen Detektorrauschen liegen.

Um die erste dieser Schwierigkeiten zu umgehen, verwendet man die Tatsache, dass die Grösse $\sum(E - p_z)$, also die Differenz zwischen totaler Energie und z Komponente des Impulses, eine Erhaltungsgrösse ist. Sie ersetzt die longitudinale Energieerhaltung, die in der Analyse von Daten von e^+e^- Collidern verwendet wird.

Man wählt die positive z -Achse in Richtung der einfallenden Protonen. Der Anfangszustand wird

$$(E - p_z)_{\text{Proton}} = 0 \quad (E - p_z)_{\text{Elektron}} = 2E_e \quad (4.41)$$

unter Vernachlässigung der Massen. Für den Endzustand gilt

$$(E - p_z)_{\text{Hadronen}} = \sum(E_h(1 - \cos \Theta_h)) \quad (E - p_z)_{\text{Elektron}} = 2E' \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4.42)$$

wo wieder $\theta = \pi - \Theta$. Die $E - p_z$ Bilanz lautet also

$$2E_e = \sum(E_h(1 - \cos \Theta_h)) + 2E' \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.43)$$

Mittels Division durch $2E_e$ erkennt man, dass offenbar der zweite Term gerade die Grösse $1 - y$ ist. y bestimmt also die Aufteilung der $E - p_z$ - Anteile auf die Hadronen und das gestreute Elektron. Grosses y , also Rückwärtsstreuung im Schwerpunktsystem, bedeutet viel $E - p_z$ im Hadron und wenig im Elektron. Kleines y , Vorwärtsstreuung, lässt das $E - p_z$ des Elektrons nur leicht verändert. Die Definition

$$y_h := \frac{\sum_{\text{had}}(E_h(1 - \cos \Theta_h))}{2E_e} =: \frac{\Sigma}{2E_e} \quad (4.44)$$

ist daher sinnvoll und erlaubt das y auch alleine aus dem hadronischen System zu gewinnen. Die Winkelabhängigkeit $1 - \cos \Theta = 2 \sin^2 \Theta/2$ unterdrückt dabei sehr effizient die Teilchen, die im Strahlrohr davonfliegen, allerdings nur in positiver z Richtung. Rückwärts bleibt das Problem (besonders bei Photondissoziation). Weiter braucht man

für die Bestimmung von y_h die einzelnen Energiedepositionen im Kalorimeter nicht einzelnen Teilchen zuzuordnen (mittels eines sogenannten “clustering” - Algorithmus), man muss nur einfach alle gemessenen Kanäle gewichtet mit $1 - \cos \Theta_h$ aufsummieren.

Manchmal wird die Bestimmung der Streuparameter dadurch falsch, dass eine nicht detektierte Bremsstrahlung des Anfangszustandes stattfindet: Das Elektron strahlt im äusseren elektrischen Feld des Protons noch schnell ein reelles Photon als Bremsstrahlung ab, bevor es in das Proton eindringt. Dies bedeutet eine effektive Reduktion von E_e und somit von s , die aber nicht bekannt ist. Die sogenannte Σ Methode umgeht dieses Problem, indem in den Definitionen $2E_e$ durch $\Sigma + 2E' \cos^2 \frac{\theta}{2}$ ersetzt wird. Man erhält

$$y_\Sigma = \frac{\Sigma}{\Sigma + 2E' \cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{und} \quad Q_\Sigma^2 = \frac{E'^2 \sin^2 \Theta}{1 - y_\Sigma}. \quad (4.45)$$

Damit können sinnvolle Messungen bis hinunter zu $y = 4 \times 10^{-3}$ gemacht werden.

Hauptsächlich um die Energieeichungen zu überprüfen, können die Streuparameter auch aus den Winkeln allein bestimmt werden. Dafür muss erst der hadronische Streuwinkel als ein mit den Energien gewichteter mittlerer Streuwinkel definiert werden, z.B. durch

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\Sigma}{P_{t,h}} \quad \text{mit} \quad P_{t,h} = \sum_{\text{had}} E_h \sin \Theta_h, \quad (4.46)$$

eine Definition, die ebenfalls versucht, das Problem der Verluste im Strahlrohr zu umgehen. Nach einigem Rechnen findet man die einfache Beziehung:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{y}{1 - y} \cdot \tan \frac{\Theta}{2} \quad (4.47)$$

was direkt erlaubt, die Elektronenergie aus den beiden Winkeln zu berechnen (siehe auch [Bent91]) und mit der direkt gemessenen Energie zu vergleichen. Wegen der energiegewichteten Definition des Winkels γ ist diese Methode aber nicht völlig unabhängig von lokalen Fehlern der Energieeichung.

Diese Definition von γ ist im übrigen konsistent mit dem Winkel γ im vorstehenden Beispiel. Er entspricht auch dem Streuwinkel des gestossenen Partons im Partonmodell (siehe später), wie in [Bent91] gezeigt wird.

4.3 Strukturfunktionen

17.01.01

4.3.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

Die klassische vollständige Beschreibung des Protonvertex geht davon aus, alle möglichen Terme für Kombinationen der relevanten Impulse p^μ und q^ν zu berücksichtigen. Aus diversen Symmetrie- und Erhaltungssatzüberlegungen bleiben nur zwei solche Terme

übrig, die mit den Faktoren W_1 und W_2 charakterisiert werden. Für Details siehe [Halz84], Kap. 8.3.

Da wir jetzt einen Prozess mit zwei unabhängigen Variablen beschreiben wollen, macht es also Sinn, einen doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt zu berechnen. Man erhält im Laborsystem:

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E' \partial \Omega} \right)_{\text{Lab}} = \frac{(\alpha)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \left(W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (4.48)$$

Vergleicht man das mit der Formel (4.14) für die elastische Streuung, kann man eine Analogie in der Winkelabhängigkeit feststellen: W_2 beschreibt die Vorwärtsstreuung wie der elektrische Formfaktor, W_1 die Rückwärtsstreuung wie der magnetische Formfaktor.

(Beachte aber, dass im Jargon bei HERA die Begriffe “vorwärts” und “rückwärts” sich auf die Protonrichtung beziehen, während in der in diesem Text verwendete klassische Streuformel-Beschreibung diese Bezeichnungen sich auf des streuende Lepton beziehen).

Eine lorentzinvariante Form dieser Formel bekommen wir durch Ersetzen der Ableitungen nach dE' und $d\Omega$ durch solche nach dx und dQ^2 unter Verwendung von (Protonruhesystem: $y = (E - E')/E$):

$$\nu := E - E' = y \cdot E, \quad x := \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (4.49)$$

$$dx|_{Q^2=\text{konst}} = d \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{4EE'}{2M\nu} \cdot d \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2E'}{My} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (4.50)$$

$$dQ^2|_{x=\text{konst}} = x s dy = -x s \frac{y}{\nu} dE' \quad (4.51)$$

Man erhält daraus, ohne weitere Information zu verwenden, den Ausdruck [Ing87]:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4} (\nu W_2 (1 - y) + 2MW_1 y^2 x) \quad (4.52)$$

Man definiert dann die Strukturfunktionen durch

$$F_2 = \nu W_2 \quad \text{und} \quad F_1 = 2MW_1 \quad (4.53)$$

und erhält damit einen völlig lorentzinvarianten Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt der unelastischen Streuung durch rein elektromagnetische Wechselwirkung:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4} (F_2(x, Q^2)(1 - y) + F_1(x, Q^2)y^2 x). \quad (4.54)$$

Die Strukturfunktionen sind im allgemeinen Fall natürlich ebenfalls von den Streuparametern abhängig.

4.3.2 Partonmodell

Wir wollen jetzt versuchen, Annahmen über die Bestandteile des Protons zu machen, die das streuende Lepton im Proton sieht. Das naive Partonmodell nimmt an, dass das Proton aus masselosen Fermionen, den Quarks, besteht, die sich alle parallel zum Protonimpuls bewegen. Die Streuung des Elektrons erfolgt dann nach Formel (4.25) an jeweils einem Quark, das vor dem Stoss den Impuls $x \cdot p$ hat. Der Rest des Protons hat den Impuls $(1 - x) \cdot p$ und fliegt ungehindert geradeaus weiter, wie im obigen Beispiel beschrieben.

Die Wahrscheinlichkeit dW , ein Parton mit dem Impuls xp in der Intervallbreite dxp anzutreffen, sei $q(x) \cdot dx$. Die Funktionen $q(x)$ heissen Partondichten. Wir müssen nun den Wirkungsquerschnitt noch mit dieser Wahrscheinlichkeit multiplizieren:

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} \right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \cdot q(x). \quad (4.55)$$

Natürlich kann unser elektromagnetischer Streuprozess genauso gut an einem Antiquark passieren, falls solche vorhanden sind. Wir können mit Hilfe der elektromagnetischen Wechselwirkung Quarks und Antiquarks nicht unterscheiden. Die Dichteverteilung der Antiquarks bezeichnet man mit $\bar{q}(x)$. Schliesslich erweitern wir aus Konventionsgründen den Ausdruck mit x :

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} \right)_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} e_q^2 (1 + (1 - y)^2) \cdot (xq(x) + x\bar{q}(x)) \quad (4.56)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (4.54) erhält man nun unmittelbar

$$\boxed{F_2 = e_q^2 \cdot (xq(x) + x\bar{q}(x)) = 2xF_1}. \quad (4.57)$$

Diese Gleichung heisst auch die ‘‘Master’’ - Gleichung des Partonmodells, die Gleichheit $F_2 = 2xF_1$ heisst die Callan-Gross-Relation. Insbesondere sind im Partonmodell die Strukturfunktionen nur von x und nicht von Q^2 abhängig. Diese Tatsache heisst Skalenverhalten (Bjorken scaling).

Hätten die Partonen Spin 0, müsste man für die Elektron-Parton-Streuung von der Mott-Streuformel ausgehen. Diese entspricht für hochrelativistische Elektronen der Formel (4.48) mit $W_1 = 0$, deshalb wäre dann $F_1 = 2MW_1 = 0$, aber der Ausdruck für F_2 ändert sich nicht. Die experimentelle Verifikation der Callan-Gross-Relation zeigt, dass die Partonen, die man elektromagnetisch sehen kann, tatsächlich Fermionen, also Spin-1/2-Teilchen, sind.

Bei der Herleitung von (4.57) haben wir die Streuformel(4.25) benützt, welche wiederum unter der Annahme gewonnen wurde, dass die Quarkmassen vernachlässigt werden können, es wurde zum Beispiel $u := (k - p')^2 \approx -2k' \cdot p \approx s \cdot (y - 1)$ angenommen. Ein aus einem Gluon fluktuierend entstandenes Quark hat aber zweifellos eine signifikante Virtualität, das heisst $p^2 > 0$. (Für die Interpretation von x in diesem Fall siehe [xstrich](#)).

Ausserdem haben wir angenommen, dass der Partonimpuls parallel zum Protonimpuls liegt, der transversale Impuls also verschwindet. Deshalb konnten wir für die Beschreibung des Partonimpulses mit nur einer Zahl x auskommen. Für aus Gluonen fluktuierende Quarks ist dies aber offensichtlich nicht mehr richtig.

Man erwartet also nur dann ein Skalenverhalten der Strukturfunktionen, falls die Bestandteile des Proton aus punktförmigen, masselosen und reellen Fermionen besteht, die keine transversale Impulskomponente besitzen.

Das Fallenlassen dieser Einschränkungen bewirkt in erster Linie, dass die Strukturfunktion F_2 auch von Q^2 abhängig wird, das Skalenverhalten also verletzt wird. Wir erwarten aber auch eine Abweichung von der Callan-Gross-Relation. Wir definieren vorerst die sogenannte *longitudinale* Strukturfunktion F_L mit

$$F_L := F_2 - 2xF_1 \quad (4.58)$$

als Abweichung von der Callan-Gross-Relation und ersetzen damit F_1 in (4.54)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} (F_2(x, Q^2) \cdot (1 + (1 - y)^2) - F_L(x, Q^2) \cdot y^2). \quad (4.59)$$

An diesem Ausdruck erkennt man zweierlei: Erstens kann eine Abweichung vom Partonmodell in Form einer Verletzung der Callan-Gross-Relation nur bei grossen y festgestellt werden, das heisst im Schwerpunktsystem bei Rückwärtsstreuung oder im HERA-Laborsystem bei Ereignissen mit kleiner Elektronenergie $|k'|$ im Endzustand.

Zweitens kann man eine modellunabhängige Messung von F_L und F_2 nur dadurch erreichen, dass man y variiert und gleichzeitig x und Q^2 festhält, da beide Strukturfunktionen von den gleichen Variablen abhängen. Dies ist aber wegen $Q^2 = xys$ nur mittels Variation der Schwerpunktsenergie, also der HERA - Strahlenergie möglich. Aber natürlich kann man QCD-Modellvorhersagen von F_2 und F_L mit Formel (4.59) experimentell überprüfen.

Die Bezeichnung “longitudinal” für F_L geht auf die Feststellung zurück, dass deren Beiträge zum Wirkungsquerschnitt nur durch longitudinal polarisierte Photonen (Helizität = 0) zustande kommen kann, siehe [Halz84], Seite 196. Reelle Photonen sind aber wegen deren verschwindenden Masse immer transversal polarisiert (Helizität = ± 1), für eine Messung von F_L soll man also nicht zu kleine Q^2 verwenden. Ausserdem verschwindet der Wirkungsquerschnitt von longitudinalen Photonen an masselosen Fermionen, wegen der Helizitätserhaltung. Man sieht also auch dadurch, dass F_L nur verschieden von null sein kann, wenn es nicht nur reelle Partonen, sondern auch virtuelle Quarks aus Gluonfluktuationen gibt. Eine Messung von F_L stellt also eine direkte Überprüfung der QCD dar.

4.3.3 Schwacher Geladener Strom: W Austausch

Elektronen wechselwirken nicht nur elektromagnetisch, sondern auch schwach. Mit dem Abschluss des LEP Forschungsprogrammes am CERN hat die Beschreibung der elek-

trochwache Wechselwirkung im Standardmodell eine hohe Genauigkeit und Sicherheit erreicht, sodass wir beruhigt auch schwache Wechselwirkung für das Studium der Struktur im Proton einsetzen können. Der einfachere Fall ist vorerst der W - Austausch, bei dem sich das Elektron in ein Neutrino verwandelt (oder umgekehrt bei Experimenten an Neutrinostrahlen).

Gemäss den Feynmannregeln muss im Matrixelement der Photon - Propagator $1/Q^2$ durch den W-Boson-Propagator $1/(Q^2 + M_W^2)$ ersetzt werden. Die Vertexfaktoren betragen jeweils $g \cdot T_3/\sqrt{2}$, wobei $g = e/\sin\theta_W$ die schwache Kopplungskonstante und T_3 der schwache Isospin der einlaufenden Fermionen darstellt. Sehen wir einmal von T_3 ab, können wir analog zu (4.54) schreiben:

$$\frac{\partial^2 \sigma^{\text{CC}}}{\partial x \partial Q^2} = \frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{x(Q^2 + M_W^2)^2} (F_2^{\text{CC}}(x, Q^2)(1-y) + F_1^{\text{CC}}(x, Q^2)y^2 x \pm F_3^{\text{CC}}(x, Q^2)(y - \frac{y^2}{2})x) \quad (4.60)$$

Hier haben wir zusätzlich eine neue Strukturfunktion F_3 eingeführt, die der unterschiedlichen Kopplung der schwachen Wechselwirkung für Elektronen (oberes Vorzeichen) und Positronen Rechnung tragen soll. Deren Vorfaktor ist durch das Partonmodell motiviert, siehe unten.

Auf der Elektronenseite des W-Propagators kommen von den acht denkbaren Helizitäts- und Ladungskombinationen der Elektronen und Neutrinos nur die beiden Fälle $e_L^- \rightarrow \nu$ und $e_R^+ \rightarrow \bar{\nu}$ in Frage, sonst ist T_3 gleich null, oder die Helizitätsregel bzw. die Leptonzahl verletzt.

Denken wir nun wieder im Partonmodell, und nehmen an, dass die Wechselwirkung im Proton drinnen an Quarks erfolgt. Auf der Quarkseite der W -Kopplung können dann nur linkshändige Quarks oder rechtshändige Antiquarks vorkommen. Um die Erhaltung der elektrischen Ladung nicht zu verletzen, kommen ausserdem nur gewisse Kombinationen von Quarkladungen vor. Die folgende Tabelle zeigt zur Erinnerung die Werte des schwachen Isospins der Isodupletts der Fermionen und ihrer Helizität. Alle anderen Fälle sind Singulett der schwachen Wechselwirkung und haben deswegen $T_3 = 0$.

T_3				
$+\frac{1}{2}$	ν	e_R^+	u_L	\bar{d}_R
$-\frac{1}{2}$	e_L^-	$\bar{\nu}$	d_L	\bar{u}_R

Schliesslich ergibt sich bei den Spinsummen für ungleiche Helizitäten von einlaufendem Quark und Elektron bzw. Positron ein Faktor $(1-y)^2$, analog zum $\cos^4 \frac{\theta}{2}$ - Term in Gleichung (4.11), bzw. Gleichung (4.25).

Die folgende Tabelle fasst die Fälle zusammen, die einen von null verschiedenen Anteil am gesamten Wirkungsquerschnitt $eq \rightarrow \nu q'$ ergeben:

	Spin $\cdot T_3(e) \cdot T_3(q)$
$e_L^- u_L \rightarrow \nu d_L$	$(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})^2$
$e_R^+ \bar{u}_R \rightarrow \bar{\nu} \bar{d}_R$	$(\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2})^2$
$e_L^- \bar{d}_R \rightarrow \nu \bar{u}_R$	$(1-y)^2 \cdot (-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})^2$
$e_R^+ d_L \rightarrow \bar{\nu} u_L$	$(1-y)^2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2})^2$

Dabei stehen u für up, charm oder top Quarks, d für down, strange oder bottom Quarks. Füllen wir also HERA mit unpolarisierten Elektronen, können wir mit Hilfe der Analyse der y Abhängigkeit von $ep \rightarrow \nu X$ - Ereignissen die Quarkdichten $u(x)$ und $\bar{d}(x)$ getrennt untersuchen, für Positronen entsprechend $d(x)$ und $\bar{u}(x)$ (siehe auch [Ing87]).

Diese Faktoren müssen nun mit dem korrekten Vorfaktor entsprechend Gleichung (4.25) multipliziert werden, und man erhält so

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial Q^2} \right)_{eq \rightarrow \nu q'} = \frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{(Q^2 + M_W^2)^2} \cdot S \quad (4.61)$$

wobei für S der entsprechende Wert aus der obigen Tabelle einzusetzen ist.

Analog zum elektromagnetischen Fall multiplizieren wir diesen Ausdruck nun mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $q(x)$ der relevanten Quarks gemäss Tabelle und bilden den doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2}$.

Für die Summe der beiden Einträge in der Tabelle für e_L^- gilt die Identität

$$u(x) + (1-y)^2 \cdot \bar{d}(x) = \frac{1}{2} \left((1 + (1-y)^2)(u + \bar{d}) + 2(y - \frac{y^2}{2})(u - \bar{d}) \right) \quad (4.62)$$

Wir identifizieren nun die Strukturfunktionen durch Koeffizientenvergleich mit (4.60).

$$F_2^{e^- p \rightarrow \nu X} = 2xF_1^{\dots} = 2(xu(x) + x\bar{d}(x)) \quad \text{und} \quad F_3^{\dots} = 2(u(x) - \bar{d}(x)) \quad (4.63)$$

Für die Positronen führt das gleiche Prozedere zu

$$F_2^{e^+ p \rightarrow \bar{\nu} X} = 2xF_1^{\dots} = 2(xd(x) + x\bar{u}(x)) \quad \text{und} \quad F_3^{\dots} = 2(d(x) - \bar{u}(x)) \quad (4.64)$$

Die Strukturfunktionen sind also für die beiden Fälle verschieden, und natürlich auch verschieden vom elektromagnetischen Fall. Man analysiert also mit diesen Identifikationen besser gleich die Partondichten.

Will man alle vier Quarkdichten u, d, \bar{u}, \bar{d} separat extrahieren, muss man Daten für Positronen und Elektronen haben. Durch eine Analyse der y Abhängigkeit erhält man je F_3 und F_2 . Aus diesen vier Funktionen lassen sich dann die vier Quarkdichten bestimmen.

4.3.4 Schwacher Neutraler Strom: Z_0 Austausch

Streut man Elektronen an Protonen mit Energien, die den Bereich der Z -Boson-Masse von etwa 90 GeV erreichen oder überschreiten, muss zusätzlich zur früher diskutierten elektromagnetischen auch die schwache Wechselwirkung in Form neutraler Ströme berücksichtigt werden.

Gemäss den Feynmannregeln für Z_0 - Austausch muss im Matrixelement der Photon-Propagator $1/Q^2$ durch den Z - Propagator $1/(Q^2 + M_W^2)$ ersetzt werden. Die Kopplung der Fermionen an das Z haben im Gegensatz zur Kopplung an die W sowohl links- als auch rechtshändige Anteile. Die Vertexfaktoren betragen generell

$$\frac{g}{2 \cos \theta_W} (c_V \pm c_A), \quad (4.65)$$

$$c_V = T_3 - 2q \sin^2 \theta_W \quad (4.66)$$

$$c_A = T_3 \quad (4.67)$$

wobei das obere Vorzeichen für linkshändige einlaufende Teilchen steht und q die elektrische Ladung des Fermions bedeutet. Falls die Streuung zwischen Lepton und Quark mit unterschiedlichen Helizitäten erfolgt, gibt es wieder einen zusätzlichen Faktor $(1 - y)^2$. 24.01.01

Schliessliche müssen wir berücksichtigen, dass es neben den rein elektromagnetischen und dem reinen Z Termen auch Interferenzterme gibt, die bei $Q^2 \approx M_Z^2$ den Wirkungsquerschnitt sogar dominieren.

Fassen wir alle Terme zusammen, wird mit

$$F_2 = A \cdot (xq(x) + x\bar{q}(x)) \quad F_3 = B \cdot (q(x) - \bar{q}(x)) \quad (4.68)$$

die Formel (4.59) ergänzt zum Wirkungsquerschnitt für neutrale elektroschwache Wechselwirkung am Proton

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial Q^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} (F_2(x, Q^2) \cdot (1 + (1-y)^2) - F_L(x, Q^2) \cdot y^2 + xF_3(x, Q^2) \cdot (1 - (1-y)^2)). \quad (4.69)$$

Die Konstanten A und B hängen von den Vertexfaktoren und somit von Helizität und Ladungsvorzeichen der Quarks und Elektronen ab, und sind zum Beispiel in [Ing87] zu finden. Eine grafische Darstellung der relativen Anteile von Z und Photonaustausch findet man für die vier Helizitäts- und Ladungskombinationen in [Cash95]

Da B für Elektronen und Positronen ein unterschiedliches Vorzeichen hat, kann man experimentell F_3 für unpolarisierte Strahlen direkt aus der Differenz $\sigma^{e^-p} - \sigma^{e^+p}$ bestimmen (siehe [H1e-]).

Generell kann man aus den vier Datensätzen neutrale und geladene Ströme von Elektron- und Positronstrahl alle Quarkdichten einzeln extrahieren, allerdings nur bei hohen Q^2 , wo die Effekte der schwachen Wechselwirkung nicht im sonst dominierenden elektromagnetischen Teil untergehen.

4.4 Partondichten in der QCD

4.4.1 Generelle Aussagen

[Halz84] Kap 9.3. Wir wollen uns nun Gedanken machen, was es für die Strukturfunktionen, respektive die Quarkdichten bedeutet, wenn die Quarks im Proton der starken Wechselwirkung unterliegen. Vorerst wollen wir Aussagen für die Quarkdichten machen, die nicht von einer speziellen Form der Wechselwirkung abhängen.

Die *Flavor-Summenregel* besagt, dass für das Proton gelten muss:

$$\int_0^1 (u(x) - \bar{u}(x)) dx = 2 \quad (4.70)$$

$$\int_0^1 (d(x) - \bar{d}(x)) dx = 1 \quad (4.71)$$

$$\int_0^1 (s(x) - \bar{s}(x)) dx = 0 \quad (4.72)$$

$s(x)$ steht dabei für alle Quarksorten ausser u und d . Die Verteilungen $u - \bar{u}$ und $d - \bar{d}$ heissen auch Valenzquarkverteilung, der Rest der Quarkdichten nennt man die Seequarkverteilung.

Wie sehen nun diese Dichteverteilungen aus? Vorerst stellen wir fest, dass für nicht wechselwirkende Quarks, $q(x)$ eine Deltafunktion bei $x = 1/3$ sein müsste. Eine Wechselwirkung wird die Dichte verschmieren (Vgl. auch Figur 9.7 in [Halz84], page 201.). Für $x \rightarrow 1$ erwarten wir $q \rightarrow 0$. Je mehr Quarks es im Teilchen gibt, umso unwahrscheinlicher wird es, dass wir bei der Streuung eines mit grossem x treffen: Man setzt deshalb $(1-x)^{2n-1}$, wo n für die Zahl der nicht beteiligten Quarks steht. Es ist für ein Proton also $n = 2$, was auch ungefähr gemessen wird.

Für $x \rightarrow 0$ erwarten wir für Valenzquarks ebenfalls $q(x) \rightarrow 0$ damit die Flavorsummenregel erfüllt bleibt.

Nimmt man zusätzlich an, dass Quarkpaare aus Gluonen virtuell erzeugt werden können, erhält man für $x \rightarrow 0$ ansteigende Seequarkdichten, da umso kleiner x ist, je wahrscheinlicher findet man ein virtuelles Quarkpaar. Dies wird von der QCD quantitativ vorausgesagt und im Experiment tatsächlich gemessen (siehe nächster Abschnitt).

Da wir x als Impulsbruchteil des Quarks definierten, müssen die mit x gewichteten Integrale der Dichten gerade den Gesamtimpuls des Protons ergeben:

$$\int_0^1 x \cdot (q(x) + \bar{q}(x)) dx = 1 - \epsilon_g \quad (4.73)$$

ϵ_g bezeichnet den Anteil des Impulses der von den Gluonen getragen wird. Experimentell wird $\epsilon_g = 0.43 \pm 0.02$ ([H1LowQ²]), also fast die Hälfte des Protonimpulses.

Betrachten wir nun die Quarkdichten als Funktion von Q^2 : Bei kleinen x , wo wir vor allem Seequarks sehen, erwarten wir eine grössere Wahrscheinlichkeit für Quarks, je grösser deren Virtualität, also je grösser die Q^2 Skala und je kleiner der Abstand wird. Im Gegensatz dazu wird es bei grossen x für immer grössere Q^2 immer wahrscheinlicher, dass das Valenzquark gerade ein Gluon abgestrahlt hat, und deshalb bei x nicht mehr vorhanden ist. Diese allgemeinen Annahmen erlauben also bereits eine qualitative Erklärung der experimentell beobachteten Skalenverletzungen der Strukturfunktionen.

4.4.2 Altarelli - Parisi - Gleichungen

Die QCD beschreibt die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen. Dabei ist der Mechanismus sehr ähnlich wie bei der elektromagnetischen Wechselwirkung, wobei statt der elektrischen Ladung die QCD-Ladung "Farbe" für die Kopplungen verantwortlich ist. Es muss also jeweils α durch α_s ersetzt werden. Es bestehen aber zwei wesentlichen Unterschiede:

- Gluonen tragen im Gegensatz zu Photonen selbst Ladung, und können deshalb untereinander wechselwirken.
- Die Wechselwirkungskonstante α_s ist nur bei grossen Q^2 , also kleinen Abständen, klein genug, dass mit Hilfe von Störungsrechnung relevante Resultate erzielt werden können.

Die Abhängigkeit von α_s vom Q^2 des ankoppelnden Gluons wird in erster Ordnung

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad \text{mit} \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad (4.74)$$

Dabei bedeuten n_f die Zahl der Quarkflavors, die aufgrund ihrer Quarkmassen an den Prozessen teilnehmen können. Wegen dem confinement divergiert α_s bei kleinen Q^2 , statt wie in der QED sinnvoll $\alpha(0)$ als fundamentale Wechselwirkungsgrösse zu verwenden, wird hier Λ als der eine fundamentale Parameter genommen, der die Wechselwirkungsstärke beschreibt. In höherer Ordnung entstehen weitere Terme $\log(Q^2/\Lambda^2)$, $\log \log(Q^2/\Lambda^2)$ usw., man nennt die erste Ordnung hier deshalb *leading log approximation* LLA. Die QCD Massenskala Λ ist von der Grössenordnung 200 MeV und markiert gewissermassen den Punkt, wo die Störungsrechnung versagt: tatsächlich wird der obige Ausdruck für $Q^2 = \Lambda^2$ divergent.

In erster Ordnung α_s ergeben sich in der unelastischen Streuung zwei zusätzliche Grafen: Das gestreute Quark strahlt vor oder nach der elektromagnetischen Wechselwirkung ein Gluon ab. Und ein Gluon und das Photon könne gemeinsam ein $q\bar{q}$ - Paar erzeugen (Photon-Gluon-Fusion). Die beiden Grafen können entsprechen den Compton-Grafen in der QED berechnet werden, wobei ein Photon durch ein Gluon ersetzt wird. Das

heisst aus $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}$ wird $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha_s}$. Ausserdem muss man berüchsichtigen, dass das einlaufende Photon die Virtualität $Q^2 \neq 0$ hat. Daraus erhält man ([Halz84], Seite 215):

$$\sigma(\gamma^* q \rightarrow qq) = \frac{2\pi\alpha e_q^2 \alpha_s}{s} \cdot P_{qq}(z) \log \frac{Q^2}{\mu^2} \quad (4.75)$$

Hier bedeutet die *Renormalisierungsskala* μ eine untere Abschneidegrenze des Integrals über alle q^2 ("Regularisierung") und

$$P_{qq} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1+z^2}{1-z} \quad z = \frac{x}{y}. \quad (4.76)$$

y ist der Impulsanteil den das Quark vor dem Stoss, x derjenige der das Quark nach dem Stoss hat. Die Splitting function $P_{qq}(z)$ ist anschaulich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Quark durch die Ausstrahlung eines Gluons seinen Impulsanteil um den Faktor z reduziert. Der Faktor $4/3$ stammt von der Mittelung über die verschiedenen Farbkombinationen.

Durch diesen Effekt wird nun der ursprüngliche Wirkungsquerschnitt, und damit die Strukturfunktion F_2 verändert. Und zwar müssen wir zusätzlich alle $q(y)$ mit $y > x$ berücksichtigen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit - also dem obigen Wirkungsquerschnitt - für die Gluonabstrahlung. Die Änderung gegenüber der Mastergleichung des Partonmodells beträgt gerade

$$F_2(x, Q^2) = \sum e_q^2 x(q(x) + \Delta q(x, Q^2)) \quad (4.77)$$

wobei über alle Quarks und Antiquarksorten summiert wird und mit

$$\Delta q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right). \quad (4.78)$$

Darin gibt es im Gegensatz zum Partonmodell nun eine Abhängigkeit von Q^2 . Diese wird meist als Ableitung nach $\log Q^2$ dargestellt:

$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (4.79)$$

Wir müssen nun aber auch den Photon - Gluon - Fusionsgraphen berücksichtigen. Das gibt mit dem gleichen Formalismus einen zusätzlichen Term $g(y) \cdot P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)$, wobei $P_{qg}(z)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass das Gluon ein $q\bar{q}$ Paar produziert, wobei das Quark den Impulsbruchteil z des ursprünglichen Gluons hat. P_{qg} muss also symmetrisch für z und $1-z$ sein, es wird

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2}(z^2 + (1-z)^2). \quad (4.80)$$

Auf die gleiche Weise kann man eine Differentialgleichung für die Gluondichte bekommen. Sie besteht aus zwei Summanden, einer für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Quark

ein Gluon abstrahlt (Splitting function $P_{gq}(z) = P_{qg}(1-z)$, und einer für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gluon von einem Gluon abgestrahlt wird (Splitting function $P_{gg}(z)$).

Die vollständige Gleichung für die Abhängigkeit (“Evolution”) der Quark- und Gluondichten von Q^2 lauten in erster Ordnung ([Rob90], Seite 76):

$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q(y, Q^2)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y, Q^2)P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)] \quad (4.81)$$

$$\frac{dg(x, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q(y, Q^2)P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y, Q^2)P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right)] \quad (4.82)$$

Dies sind die Altarelli-Parisi Gleichungen (auch DGLAP genannt, von 1977), wobei alle Grafen in erster Ordnung (LO) berechnet werden.

DGLAP beschreibt nur die Q^2 - Abhängigkeit der Partondichten. Deren x Abhängigkeit bei einem bestimmten Q_0^2 , $q_0(x)$, muss experimentell bestimmt werden. Dann können mit Hilfe von DGLAP die Partondichten $q(x, Q^2)$ bei allen Q^2 berechnet werden.

Im Proton bei sehr kleinen x sind die Valenzquarks fast ausgestorben. Hier dominieren das Gluonfeld und die daraus entstehenden virtuellen $q\bar{q}$ - Paare das Geschehen. In LO kann man in diesem Fall eine Abschätzung machen, wie sich die Gluondichte in Funktion von x verhält ([Rob90], Seite 112f.): Für $z \rightarrow 0$ wird $P_{gg} \rightarrow \frac{6}{z}$. Ausserdem lassen wir wegen der Dominanz von $g(x)$ die Partondichten qx in der DGLAP Gleichung weg. Es wird nach einiger Rechnung dann

$$xg(x) = e^{\sqrt{k \cdot \log T \log \frac{1}{x}}} \quad \text{mit} \quad T = \frac{\log \frac{Q^2}{\Lambda^2}}{\log \frac{Q_0^2}{\Lambda^2}}. \quad (4.83)$$

Die Quarkdichten $q(x)$ sind dann im wesentlichen proportional zu $dxg(x)/d \log(1/x)$. Studien an Daten ([Ball94]) bei $x = 10^{-3} \dots 10^{-4}$ bestätigen diese Zusammenhänge innerhalb der Fehler, was ein wichtiger Hinweis für die Richtigkeit der QCD-Beschreibung des starken Kraftfeldes darstellt. Man spricht auch von *double asymptotic scaling* DAS. Das gilt allerdings nur für die erste Ordnung, in höherer Ordnung sind keine solchen analytischen Ausdrücke für Voraussagen bekannt.

Weitere Näherungen führen schliesslich zur Voraussage, dass

$$xg(x) \propto \frac{1}{x^\lambda} \quad \lambda = 0.3 \dots 0.4 \quad (4.84)$$

unabhängig von Q^2 . Die Daten legen ein solches Verhalten tatsächlich nahe, allerdings führt ein Datenfit nur zu $\lambda \approx 0.25$ bei $Q_0^2 = 4 \text{ GeV}^2$, bei kleineren Q^2 nimmt λ weiter ab.

Höhere Ordnungen: Bisher sind Rechnungen in der Regel bis next-to-leading-order NLO gemacht, in Ausnahmefällen NNLO. In diesen Fällen ändern sich in den DGLAP Gleichungen sowohl die α_s -Entwicklung als auch die Splitting Functions. Die Ausdrücke für NLO findet man zum Beispiel in [Rob90], Seite 92f.

Die Frage, bis zu wie kleinen Q^2 die DGLAP NLO Näherungen die Daten noch gut beschreiben, hat in den letzten Jahren die Gemüter heftig bewegt. Erstaunlicherweise scheint bis hinunter zu $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ keine wesentliche Abweichung von der DGLAP Beschreibung zu beobachten zu sein. Da in diesem Bereich die Störungsrechnung wegen dem grossen α_s aber kaum mehr richtige Resultate liefern sollte, ist man geneigt zu glauben, dass diese DGLAP Beschreibung bei kleinen Q^2 offenbar nicht sehr empfindlich auf solche Abweichungen ist.

4.4.3 Messung von F_2

Primär wird der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt in Funktion von x und Q^2 gemessen. Dafür werden zweidimensionale Intervalle (bins) definiert, deren Grösse der experimentellen Auflösung angepasst werden. Dann wird vorerst die Messung mit Hilfe von Simulationen anhand angenommener Strukturfunktionen simuliert. Dabei stellt man fest, dass wegen Messfehler, Ereignisse zum Teil im falschen Bin landen (“Migration”). Dies kann erhebliche systematische Verschiebungen ergeben, da der WQ stark schwankt ($1/Q^4$!).

Dann nimmt man Daten, füllt sie auch in die bins ein, und aus dem Verhältnis der Simulationsereignisse zu den Datenereignisse wird ein Korrekturfaktor gewonnen, der auf der Simulation zugrunde liegenden Strukturfunktion angewendet wird, um die “gemessene” Strukturfunktion zu gewinnen.

Es stehen heute Daten in 5 Grössenordnungen in Q^2 und in x , die eine intensives Studium der QCD im Proton erlaubt.

4.4.4 Messung von F_L

durch Ableitung paper Kap 5

durch Strahlenergievariation

durch ISR

4.4.5 Bestimmung der Gluonsdichte

In der aktuellen Auswertung des Experimentes H1 [H1LowQ²] wurde für die Partondichten bei $Q_0^2 = 4 \text{ GeV}^2$ der folgende Ansatz verwendet:

$$xq_0(x) = a \cdot x^b \cdot (1 - x)^c \cdot [1 + d\sqrt{x} + ex] \quad (4.85)$$

Der Term in Klammern entspricht der qualitativen Diskussion in 4.4.1. Der Term x^b wird durch das Doppellogarithmische Scaling (4.84) motiviert, während der Ausdruck in der eckigen Klammer weitere Korrekturen erlauben soll.

auch heavy quarks und 2 jet events.

4.4.6 Bestimmung von α_s

siehe [H1LowQ²]

k

Kapitel 5

Kernphysik und Kernreaktoren

5.1 Die Kernmassen und ihre Häufigkeit

Siehe [Povh95] Seite 14 bis 17.

5.2 Das Tröpfchenmodell

Weizsäcker-Massenformel

Siehe [Povh95] Seite 19 bis 21.

5.3 Der α - Zerfall

Siehe [Povh95] Seite 31 bis 33.

5.4 Das Deuteron

Siehe [Povh95] Seite 224 bis 234.

5.5 Das Fermigasmodell

Siehe [Povh95] Seite 235 bis 238.

5.6 Das Schalenmodell

Siehe [Povh95] Seite 244 bis 247.

5.7 Reaktorphysik

5.7.1 Kernspaltung und Spaltneutronen

Siehe [Berg75] Seite 1277.

5.7.2 Neutron - Absorption

Siehe [Berg75] Seite 1281 bis 1290.

5.7.3 Kettenreaktion und Reaktortypen

Siehe [Berg75] Seite 1295.

5.7.4 Moderator und Kühlmittel

Siehe [Berg75] Seite 1299.

5.7.5 kritischer Zustand und Reaktor-Regelung

Siehe [Berg75] Seite 1301/1304.

Vierfaktorregel (Seite 1330).

Störfälle, Seite 1346 ff.

Zeitliche Verhältnisse bei einem schweren Unfall, Seite 1368.

Index

- W^\pm , 23
- Z^0 , 23
- β Spektrum, 72
- ft - Werten, 73

- adjungierten Spinor, 52
- Anaximander, 10
- Antibaryonen, 16, 28
- Antiteilchen, 40
- Antiteilchen, 16
- asymptotischer Freiheit, 21
- atomos, 10

- Bagmodell, 22
- Bahndrehimpuls, 34
- barn, 46
- Baryonen, 16, 28, 34
- Betatron, 59
- Betatronoszillationen:, 60
- Bhabba - Streuung, 70
- Bosonen, 21
- Bunchstruktur, 59

- C-Parität, 41
- CKM Matrix, 42
- collider, 45, 60
- completeness relation, 55
- Confinement, 22
- confinement, 79
- CPT, 41

- Dichte der Endzustände, 54
- Diracgleichung, 39
- diskrete Quantenzahlen, 44
- double asymptotic scaling, 97
- Drehimpulses, 34

- Effektivität, 46
- el. Ladung, 44

- Element, 10
- Elementarteilchen, 10
- Energieverlust, 62

- Familien, 16
- FCNC, 42
- Federmodell, 23
- Fermifunktion, 72
- Fermikonstante, 56, 72
- Fermionen, 21
- Fermiübergängen, 73
- Feynmandiagramm, 19
- Feynmanngrafien, 10
- fixed target, 45
- Flavor-Summenregel, 94
- Flavours, 42
- Fokussierelemente:, 60
- Formfaktor, 79
- freien Quarks, 22
- Freiheitsgrade, 27
- Fundamentales, 9

- Gamow-Teller Übergang, 73
- gebundene Zustände, 16
- Generationen, 16
- Glueballs, 28
- Gluon, 21
- Gluonen, 79
- Gluonsee, 22
- Grand Unified Theory, 29
- Gravitation, 25
- GUT, 29

- Hadron, 79
- Helizitätserhaltung, 70
- Helizitätszuständen, 17
- Higgs, 27
- hot big bang, 31

- invariante Masse, 37
 Isosynchrozyklotron, 60

 Kalorimetrie, 66
 Kernkräfte, 28
 Kopplungskonstante, 20
 Kosmologie, 31
 Kraftfelder, 18
 Kräfte, 18

 Ladungskonjugation, 40
 leading log approximation, 95
 Lebensdauer, 44, 47, 48
 Leptonen, 16
 Leptonzahlerhaltung, 43
 Lichtjahre, 31
 Lichtkegel, 48
 Linearbeschleuniger, 58
 longitudinale, 90
 Lorentztransformationen, 48
 Luminosität, 46

 Masse, 44
 Massenschale, 48
 Matrixelement, 53
 Meson, 34
 Mesonen, 16, 28
 Mesopotamien, 9
 Messmethode, 43
 metrische Tensor, 48

 Neutrinoszillation, 43
 Neutronzerfall, 11
 Nukleare Wechselwirkungslänge, 67

 Parität, 37
 Paritätsoperation, 37
 Paritätsverletzung, 25
 Pauli Ausschlussprinzip, 21
 Photonen, 19
 Planckmasse, 26
 Planetenephemeriden, 9

 Quantenchromodynamik, 21
 Quantenfeldtheorie, 18
 Quarkonia, 22
 Quarks, 16, 79

 Raumzeitkoordinate, 47
 Reaktionsrate, 46
 Renormalisierungsskala, 96
 Rotationsinvarianz, 34

 s, 17
 Samplingkalorimeter, 67
 schwache Hyperladung, 17
 schwachen Kraft, 23
 Seequarks, 22
 Selbstwechselwirkung, 22
 showering, 61
 Sizingillationslicht, 66
 Spiegelung, 36
 Spin, 34, 44
 Spinoren, 39
 squark, 29
 Standardmodell, 16
 starke Potential, 22
 starken Wechselwirkung, 21
 sterilen Neutrinos, 25
 Streuamplitude, 52
 SUGRA, 29
 supererlaubten, 73
 Supersymmetrie, 29
 SUSYGUT, 29
 Symmetrioperation, 33
 Symmetrieprinzipien, 16
 Synchrotron, 59
 Synchrotronschwingung:, 60
 Synchrotronstrahlung:, 60

 T - Matrix, 52
 Teilchen, 16
 Thales von Milet, 9
 Theorie, 16
 transition current, 52
 Translation, 33
 tune, 60

 virtuell, 48
 virtuelle Teilchen, 20

 Wechselwirkungen, 16, 18
 Weizsäcker-Massenformel, 101
 Wirkungsquerschnitt, 45

Yukawa - Potoential, 23

Zeitumkehr, 36, 38

Zyklotron, 59